Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ:
Декан
_______________Л. В.Гензе
«30» 06 2022 г.

Рабочая программа дисциплины

Функциональный анализ

по направлению подготовки

02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль) подготовки :
Основы научно-исследовательской деятельности в области математики и компьютерных наук

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2022

Код дисциплины в учебном плане: Б1.О.2.02

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
_____________Л.В. Гензе

Председатель УМК
____________ Е.А. Тарасов

Томск – 2022

1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики как для использования в профессиональной деятельности, так и для консультирования.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Демонстрирует навыки работы с профессиональной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам.

ИОПК 1.2 Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин.

ИОПК 1.3 Владеет фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук.

2. Задачи освоения дисциплины

Фундаментальная подготовка студента и формирование у него прочных теоретических знаний и практических навыков для использования методов функционального анализа в решении конкретных научных и практических задач.

3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к Блоку 1 «Дисциплина (модули)».
Дисциплина относится к обязательной части образовательной программы.

4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине

Пятый семестр, экзамен

5. Входные требования для освоения дисциплины

Для успешного освоения дисциплины требуются результаты обучения по следующим дисциплинам: «Математический анализ», «Алгебра», «Теория множеств», «Дифференциальные уравнения».

6. Язык реализации

Русский

7. Объем дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 6 з.е., 216 часов, из которых:
-лекции: 48 ч.
-практические занятия: 32 ч.
Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

8. Содержание дисциплины, структурированное по темам

Тема 1. Линейные нормированные пространства
Определения и свойства. Примеры ЛНП. Полнота.

Тема 2. Линейные ограниченные операторы

Норма линейного ограниченного оператора. Полнота пространства $L(E, F)$. Изоморфизм всех n-мерных ЛНП.

Тема 3. Линейные ограниченные функционалы

Норма линейного ограниченного функционала. Теорема Хана-Банаха и следствия из нее.

Тема 4. Принцип равномерной ограниченности

Теорема Банаха-Штейнгауза. Естественная изометрия и признак ограниченности множества в ЛНП.

Тема 5. Принцип открытости отображения

Теорема Банаха об обратном операторе. Теорема о замкнутом графике.

Тема 6. Вполне непрерывные операторы

Относительная компактность. Критерий относительной компактности в полных пространствах (теорема Хаусдорфа). Сумма, произведение на скаляр и композиция вполне непрерывных операторов. Предел последовательности вполне непрерывных операторов. Теорема Арцела-Асколи.

Тема 7. Гильбертовы пространства

Скалярное произведение и его свойства. Неравенство Коши-Буняковского.

Тема 8. Геометрия гильбертовых пространств

Теорема о наилучшем приближении. Теорема о проекции. Теорема Риса об общем виде функционала.

Тема 9. Ортонормированные системы

Теорема Шмидта об ортогонализации.

Тема 10. Базисы и ряды Фурье в гильбертовом пространстве

Экстремальное свойство многочлена Фурье. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Полнота и замкнутость.

Тема 11. Сопряженный оператор в гильбертовом пространстве

Существование и единственность сопряженного оператора, его свойства. Самосопряженные операторы и их свойства.

Тема 12. Вполне непрерывные операторы в гильбертовом пространстве

Вполне непрерывность сопряженного оператора. Вполне непрерывность оператора Фредгольма.

Тема 13. Спектральная теория ограниченных операторов

Спектр и резольвента, классификация спектра. Непустота и компактность спектра. Спектр сопряженного и самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве. Спектр вполне непрерывного оператора в гильбертовом пространстве.

Тема 14. Уравнения Риса-Шаудера

Существование и единственность решения. Теоремы Фредгольма. Теорема Гильберт-Шмидта и ее применение к решению уравнений Риса-Шаудера. 1-я и 2-я формулы Гильберта-Шмидта. Теорема о неподвижной точке и ее применение к решению уравнений Риса-Шаудера и уравнений Вольтерры.

9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине проводится путем выполнения индивидуальных домашних заданий и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр.

10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Экзамен в пятом семестре проводится в устной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из двух теоретических вопросов (первый – из общей теории ЛНП, второй – из теории гильбертовых пространств) и одной задачи. Продолжительность подготовки к экзамену 2 часа.

Теоретические вопросы проверяют ИОПК 1.1 и 1.3. Задача проверяет ИОПК 1.2.

Примерный перечень теоретических вопросов:

1. Линейные нормированные пространства. Определения. Свойства нормы.
2. Подпространства в ЛНП.
3. Примеры ЛНП. Полнота пространств $M(\Gamma)$ и $C(K)$.
4. Примеры ЛНП. Неполнота пространства c_{00}.
5. Линейные ограниченные операторы. Критерии ограниченности.
6. Примеры линейных ограниченных операторов. Операторы Фредгольма и Вольтерры. Неограниченные операторы.
7. Пространство линейных ограниченных операторов $L(E,F)$. Его полнота.
8. Изоморфизмы и изометрии. Изоморфизм конечномерных пространств.
9. Линейные ограниченные функционалы. Сопряженное пространство.
10. Теоремы Хана--Банаха. Следствия.
11. Теорема Банаха—Штейнгауза.
12. Теорема Банаха об обратном операторе. Произведение ЛНП. График отображения, его свойства. Теорема о замкнутом графике.
13. Относительно компактные множества. Вполне непрерывные операторы. Теорема о сумме вполне непрерывных операторов и об умножении вполне непрерывного оператора на скаляр.
14. Относительно компактные множества. Вполне непрерывные операторы. Теорема о композиции вполне непрерывных операторов.
15. Относительно компактные множества. -сети и теорема Хаусдорфа. Теорема о пределе последовательности вполне непрерывных операторов.
16. Корректность и вполне непрерывность оператора Фредгольма на пространстве $C[a,b]$.
17. Скалярное произведение. Свойства скалярного произведения. Неравенство Коши--Буняковского.
18. Непрерывность скалярного произведения. Равенство параллелограмма. Примеры гильбертовых пространств.
19. Теорема о перпендикуляре к произвольному подмножеству. Теорема Пифагора и следствие из нее.
20. Теорема о наилучшем приближении.
21. Теорема о проекции и следствия из нее.
22. Общий вид функционала в гильбертовом пространстве.
23. Ортонормированные и полные системы в гильбертовом пространстве. Теорема Шмидта об ортогонализации.
24. Базисы и ряды Фурье в гильбертовом пространстве. Экстремальное свойство многочлена Фурье. Неравенство Бесселя.
25. Замкнутые системы и равенство Парсеваля. Критерий замкнутости для ортонормированных систем.

26. Сопряженный оператор в гильбертовом пространстве. Теорема о существовании сопряженного оператора.
27. Сопряженный оператор в гильбертовом пространстве. Примеры и свойства сопряженных операторов.
28. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве и их свойства. Примеры самосопряженных операторов.
29. Вполне непрерывные операторы в гильбертовом пространстве и их свойства. Вполне непрерывность сопряженного оператора.
30. Спектр линейного непрерывного оператора. Классификация точек спектра.
31. Связь между спектром оператора и его сопряженного в гильбертовом пространстве.
32. Связь между остаточным спектром оператора и точечным спектром его сопряженного в гильбертовом пространстве.
33. Связь между точечным спектром оператора и остаточным и точечным спектром его сопряженного в гильбертовом пространстве.
34. Спектр самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве.
35. Спектр вполне непрерывного оператора в гильбертовом пространстве.
36. Уравнения Риса--Шаудера и уравнения Фредгольма. Лемма об инъективности, сюръективности и биективности оператора $\lambda I - T$.
37. Уравнения Риса--Шаудера и уравнения Фредгольма. Первая теорема Фредгольма. Единственность решения уравнения Риса--Шаудера.
38. Уравнения Риса--Шаудера и уравнения Фредгольма. Третья теорема Фредгольма.
39. Теорема Гильберта--Шмидта.
40. Первая формула Гильберта--Шмидта.
41. Вторая формула Гильберта--Шмидта.
42. Теорема о неподвижной точке и ее применение к решению уравнений Риса-Шаудера.
43. Обобщенная теорема о неподвижной точке и ее применение к решению уравнений Вольтерры.

Примеры задач:

1. Пусть $T: l_2 \to l_2$, $T((x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots)) = (0, 0, x_1, x_2, \ldots x_n, 0, 0, \ldots)$. Найдите T^*.
2. Найдите скалярное произведение $\langle x, y\rangle$ векторов $x = (i, -1, 3+i, 3)$ и $y = (i, -2, -i, i)$ в пространстве $\mathbb{C}^4$.
3. Найдите скалярное произведение $\langle x, y\rangle$ векторов $x = \left\{\left(\frac{i}{2}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ и $y = \left\{\left(-\frac{i}{2}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ в l_2.
4. Найдите все собственные векторы оператора $T: \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$, заданного формулой $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3, 2x_2 + x_4, 0, 0)$.
5. Найдите все собственные векторы оператора $T: L_2(-1,1) \to L_2(-1,1)$, заданного формулой $Tx(t) = \int_{-1}^{1} (3ts + 5t^2 s^2) x(s)\, ds$.
6. Сходится ли последовательность функций $\{x_n(t) = e^{-nt}\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $L_1(0,1)$? Если сходится, то найдите предельную функцию.
7. Сходится ли данная последовательность функций $\left\{x_n(t) = n^2 e^{-n(t+1)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $C[0,1]$? Если сходится, то найдите предельную функцию.
8. Решите уравнение Фредгольма $x(t) = \mu \int_{-1}^{1} (t^2 + s^3) x(s) ds + t$.

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Необходимым условием получения оценки не ниже «удовлетворительно» является наличие всех правильно решенных индивидуальных домашних заданий.

Сама оценка за экзамен складывается из баллов за теоретические вопросы (от 0 до 2 баллов) и баллов за задачу (от 0 до 1 балла).

Сумма баллов	Оценка
5	Отлично
4	Хорошо
3	Удовлетворительно
2	Неудовлетворительно
1	Неудовлетворительно
0	Неудовлетворительно

Баллы за теоретический вопрос	Критерии соответствия
2	студент ответил на вопрос без принципиальных ошибок и существенных пробелов в доказательствах и рассуждениях
1	в целом дан правильный ответ на вопрос, но доказательства содержат неточности или не полностью изложены
0	ответ отсутствует или представлен очень поверхностно и с нарушением логики изложения

Баллы за задачу	Критерии соответствия
1	Задача решена верно с первой попытки или со второй попытки (после замечаний экзаменатора)
0	Задача решена неверно ни с первой, ни со второй попытки

11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «Moodle» - https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=648

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

в) План практических занятий по дисциплине.

Занятие 1. Линейные нормированные пространства. Свойства нормы.
Занятие 2-3. Сходимость в ЛНП.
Занятие 4-6. Нахождение нормы линейных функционалов.
Занятие 7. Решение уравнений Фредгольма с вырожденным ядром.
Занятие 8. Нахождение элемента наилучшего приближения.
Занятие 9. Нахождение сопряженного оператора.
Занятие 10-13. Спектр линейного оператора.
Занятие 14. Решение уравнений Фредгольма с симметричным ядром.
Занятие 15. Формулы Гильберта-Шмидта.
Занятие 16. Теорема о неподвижной точке.

г) Методические указания по организации самостоятельной работы студентов.

Для качественного освоения дисциплины необходимо постоянно работать с конспектами лекций, и сразу выполнить все задания по лекции (это проверка простых фактов, повторение определений, доказательство простейших утверждений, выводы следствий из доказанных теорем). Кроме этого, самостоятельная работа студентов состоит в более глубоком изучении разделов дисциплины с помощью основной и дополнительной литературы. Индивидуальные задания рекомендуется решать сразу после того, как аналогичные задания были разобраны на практических занятиях.

12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

1. Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. Краткий курс функционального анализа. Санкт-Петербург, «Лань», 2009. 270 с.
2. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа, М.: физматлит, 2009. 570 с.
3. Кириллов А. А. Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа. 2-е изд. - М.: Наука, 1988. - 400 с.
4. Треногин В.А. Функциональный анализ. - М.: Наука, 1980. - 496 с.
5. Сибиряков Г.В. Введение в теорию пространств Банаха. - Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982. - 82 с.
6. Хатсон В., Пим Дж. С. Приложения функционального анализа и теории операторов. - М.: Мир, 1983. - 432 с.
7. Антоневич А.Б., Радыно Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. - Минск: Издательство «Университетское», 1984. - 351 с.
8. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию. - М.: Наука, 1975. - 302 с.
9. Н.В. Филимоненкова. Конспект лекций по функциональному анализу. Санкт-Петербург, «Лань», 2015. 168 с.
10. А.Г. Порошкин. Лекции по функциональному анализу. М.: Вузовская книга, 2007. 431 с.

б) дополнительная литература:

1. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. - М.: Мир, 1977. - 360 с.
2. Рудин У. Функциональный анализ. - М.: Мир, 1975. - 448 с.
3. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. - М.: ИЛ, 1962. - 896 с.
4. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. - М.: Мир, 1970. - 352 с.
5. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. - М.: Наука, 1974. - 480 с.
6. Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функциональный анализ. Курс лекций. - К.: Вища школа, 1990. - 600 с.

в) задачники.

1. Антоневич А.Б., Князев П.Н, Радыно Я.В. Задачи и упражнения по функциональному анализу. - Минск: Вышэйшая школа, 1978. - 205 с.
2. Краснов М.Л. Киселев А.И. Макаренко Г.И. Интегральные уравнения. - М.: Наука, 1968. - 192 с.
3. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. - М.: Наука, 1984. - 256 с.

г) ресурсы сети Интернет:

1. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library.htm

13. Перечень информационных технологий

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение: не требуется

б) информационные справочные системы:

– Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ – http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system

– Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ – http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index

– ЭБС Лань – http://e.lanbook.com/

– Образовательная платформа Юрайт – https://urait.ru/

14. Материально-техническое обеспечение

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

15. Информация о разработчиках

Гензе Леонид Владимирович, к.ф.-м.н., доцент каф. математического анализа и теории функций