Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ:
Декан
_________________Л.В. Гензе
« 31 » 05 20 22 г.

Рабочая программа дисциплины

Алгебра

по направлению подготовки

01.03.01 Математика
02.03.01 Математика и компьютерные науки
01.03.03 Механика и математическое моделирование

Направленность (профиль) подготовки :
Основы научно-исследовательской деятельности в области математики
Основы научно-исследовательской деятельности в области математики и компьютерных наук
Основы научно-исследовательской деятельности в области механики и математического моделирования

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2022

Код дисциплины в учебном плане: Б1.О.2.04

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
_____________Л.В. Гензе

Председатель УМК
_____________Е.А. Тарасов

Томск – 2022

1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики как для использования в профессиональной деятельности, так и для консультирования.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Демонстрирует навыки работы с профессиональной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам

ИОПК 1.2 Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин

ИОПК 1.3 Владеет фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук

2. Задачи освоения дисциплины

– Освоить навыки работы с профессиональной литературой по алгебре для успешной учебной деятельности (ИОПК 1.1).

– Научиться выбирать оптимальную методику и подбирать алгебраический аппарат для решения задач профессиональной деятельности (ИОПК 1.2).

– Овладеть основными понятиями и результатами алгебры, а также некоторыми стандартными методами доказательства теорем алгебры (ИОПК 1.3).

3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к Блоку 1 «Дисциплина (модули)».

Дисциплина относится к обязательной части образовательной программы.

4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине

Первый семестр, экзамен

Второй семестр, экзамен

5. Входные требования для освоения дисциплины

Для успешного освоения дисциплины требуются компетенции, сформированные в ходе освоения образовательных программ предшествующего уровня образования.

6. Язык реализации

Русский

7. Объем дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 10 з.е., 360 часов, из которых:

-лекции: 80 ч.

-практические занятия: 80 ч.

в том числе практическая подготовка: 0 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

8. Содержание дисциплины, структурированное по темам

Тема 1. Множества и операции над ними. Целые числа. Наибольший общий делитель. Основная теорема арифметики. Перестановки, их четность, транспозиции. Подстановки и их умножение. Матрицы и подматрицы. Действия над матрицами и их свойства. Определители и их свойства. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа и следствия из нее. Невырожденные матрицы и обратная матрица. Базис и ранг системы векторов. Ранг матрицы и его вычисление (ИОПК 1.1, ИОПК 1.2, ИОПК 1.3).

Тема 2. Теорема Крамера, формулы Крамера. Теорема Кронекера – Капелли о совместности системы. Общее решение системы линейных уравнений, алгоритм его нахождения. Метод последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса). Системы линейных однородных уравнений. Теорема о существовании фундаментальной системы решений. Алгоритм построения фундаментальной системы решений (ИОПК 1.1, ИОПК 1.2, ИОПК 1.3).

Тема 3. Бинарные алгебраические операции и их свойства. Нейтральный и симметричный элементы, их единственность. Группы и подгруппы. Числовые группы. Симметрическая и знакопеременная группы, группы диэдра. Полная линейная группа и ее подгруппы. Кольца и подкольца. Делители нуля и обратимые элементы. Числовые кольца, кольца матриц, кольца вычетов. Поля и подполя. Простые поля. Полная линейная группа и кольцо матриц над полем. Изоморфизмы групп и колец (ИОПК 1.1, ИОПК 1.2, ИОПК 1.3).

Тема 4. Расширение поля. Построение поля комплексных чисел. Операции над комплексными числами в алгебраической форме. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра. Извлечение корня из комплексного числа. Комплексные корни из единицы. Первообразные корни как образующие группы корней из единицы. Присоединение элемента к полю. Теорема о единственности поля комплексных чисел (ИОПК 1.1, ИОПК 1.2, ИОПК 1.3).

Тема 5. Кольцо многочленов над полем. Алгоритм Евклида. Неприводимые многочлены. Основная теорема о разложении многочлена на множители (ИОПК 1.1, ИОПК 1.2, ИОПК 1.3).

Тема 6. Корни многочленов. Теорема Безу и ее следствия. Кратные корни многочлена. Теорема о понижении кратности корня при переходе к производной, следствие из этой теоремы. Основная теорема алгебры многочленов (теорема Гаусса) и ее следствия (ИОПК 1.1, ИОПК 1.2, ИОПК 1.3).

Тема 7. Линейные пространства. Базисы и размерность пространства. Теорема об изоморфизме линейных пространств (ИОПК 1.1, ИОПК 1.2, ИОПК 1.3).

Тема 8. Критерий подпространства. Построение подпространств с помощью линейных оболочек. Связи между двумя базисами и между координатами одного вектора в этих базисах (ИОПК 1.1, ИОПК 1.2, ИОПК 1.3).

Тема 9. Операторы линейных пространств. Образ и ядро оператора. Ранг и дефект. Критерии обратимости оператора (ИОПК 1.1, ИОПК 1.2, ИОПК 1.3).

Тема 10. Понятие алгебры над полем. Изоморфизм алгебр (ИОПК 1.1, ИОПК 1.2, ИОПК 1.3).

Тема 11. Собственные векторы и собственные значения оператора. Собственные подпространства. Спектр оператора и его инвариантность. Алгоритм нахождения собственных значений и собственных векторов оператора (ИОПК 1.1, ИОПК 1.2, ИОПК 1.3).

9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, выполнения домашних заданий (ИОПК 1.1, ИОПК 1.2, ИОПК 1.3), проведения контрольных работ (ИОПК 1.2, ИОПК 1.3) и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр.

10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Первая часть экзамена в первом и втором семестрах проводится по билетам в письменной форме с устной защитой. Экзаменационный билет состоит из двух теоретических вопросов, проверяющих ИОПК 1.1 и ИОПК 1.3.

Вторая часть экзамена представляет собой беседу со студентом, в которой проверяется знание основных формулировок теорем и определений (ИОПК 1.1, ИОПК 1.3) и умение решения типовых задач (ИОПК 1.2).

Примерный перечень теоретических вопросов

1-й семестр

1. Деление целых чисел с остатком. Наибольший общий делитель. Взаимно простые числа. Простые числа и их свойства. Теорема Евклида (с доказательством). Основная теорема арифметики.
2. Перестановки и подстановки. Теорема об изменении чётности перестановки при транспозиции.
3. Понятие матрицы. Сложение и умножение матриц, их свойства. Транспонирование матриц.
4. Определители матриц и их свойства.
5. Теорема о произведении минора на его алгебраическое дополнение.
6. Теорема Лапласа и следствия из неё.
7. Теорема об определителе произведения двух матриц.
8. Теорема об обратной матрице. Алгоритм нахождения обратной матрицы.
9. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов.
10. Ранг систем вектор-строк и вектор-столбцов. Теорема о ранге матрицы (без доказательства).
11. Алгоритм нахождения ранга матрицы через миноры. Критерий равенства определителя нулю.
12. Элементарные преобразования матриц и их связь с рангом матрицы (без доказательств).
13. Ступенчатые и псевдоступенчатые матрицы, их свойства.
14. Критерий эквивалентности матрицы единичной матрице.
15. Теорема Крамера и формулы Крамера.
16. Теорема Кронекера – Капелли. Решение произвольной системы линейных уравнений, алгоритм решения.
17. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
18. Теорема о количестве линейно независимых решений однородной системы, алгоритм решения такой системы. Фундаментальная система решений.
19. Бинарные алгебраические операции. Коммутативность и ассоциативность операций. Теорема о расстановке скобок в полугруппе.
20. Нейтральный и симметричный элементы в группоидах, их единственность.
21. Группы и подгруппы, примеры. Критерий подгруппы.
22. Симметрическая группа и знакопеременная группа.
23. Симметрии правильных n-угольников. Группа диэдра.
24. Группы матриц. Полная линейная группа, специальная линейная группа.
25. Кольца и подкольца, примеры. Свойства операций в кольцах. Критерий подкольца (без доказательства).
26. Делители нуля и обратимые элементы в кольцах, примеры. Теорема о связи между обратимыми элементами и неделителями нуля.
27. Теорема о мультипликативной группе кольца. Примеры мультипликативных групп колец.
28. Кольца матриц. Мультипликативная группа кольца матриц.

29. Построение кольца вычетов $\mathbf{Z}_n$. Теорема об обратимых элементах кольца $\mathbf{Z}_n$.

30. Поля, примеры полей. Отличия поля от кольца. Теорема о конечных коммутативных кольцах с единицей без делителей нуля.

31. Подполе, примеры подполей. Критерий подполя.

32. Простые поля. Простота полей $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{Z}_p$. Теорема о существовании простого подполя.

33. Изоморфизмы групп и колец, примеры. Образы нейтрального и симметричного элементов при изоморфизме.

34. Построение поля комплексных чисел. Поле комплексных чисел как расширение поля $\mathbf{R}$, содержащее корень уравнения $x^2 + 1 = 0$.

35. Операции над комплексными числами в алгебраической форме. Геометрическое изображение комплексных чисел. Модуль и аргумент. Тригонометрическая форма комплексного числа.

36. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра.

37. Извлечение корня из комплексного числа.

38. Корни n-й степени из единицы. Теорема о группе корней U_n.

39. Первообразные корни. Теорема о первообразных корнях.

40. Единственность поля комплексных чисел.

2-й семестр

1. Теорема о делении многочлена с остатком. Свойства делимости многочленов.

2. Наибольший общий делитель двух многочленов, теорема о его существовании.

3. Теорема о представимости наибольшего общего делителя многочленов $f(x)$ и $g(x)$ в виде $f(x)u(x) + g(x)v(x)$.

4. Взаимно простые многочлены. Критерий взаимной простоты. Свойства взаимно простых многочленов.

5. Неприводимые и приводимые многочлены. Свойства неприводимых многочленов. Примеры таких многочленов над разными полями.

6. Основная теорема о разложении многочлена на множители.

7. Корни многочленов. Теорема Безу и следствия из неё.

8. Кратные корни многочлена. Теорема о понижении кратности корня при переходе к производной, следствие из этой теоремы.

9. Основная теорема алгебры многочленов и следствия из неё.

10. Теорема о невещественных корнях многочленов с вещественными коэффициентами. Неприводимость многочленов над полями $\mathbf{C}$ и $\mathbf{R}$.

11. Определение линейного пространства. Примеры. Свойства операций в линейном пространстве.

12. Линейная зависимость и независимость векторов. Критерии линейной зависимости и линейной независимости.

13. Теорема о замене и следствие из неё.

14. Базисы и размерность пространства. Доказать, что все базисы содержат одно и то же число векторов.

15. Примеры базисов в конкретных пространствах.

16. Теорема о выражении векторов через базис. Координаты векторов. Примеры координат.

17. Теорема о продолжении базиса и следствие из неё.

18. Изоморфизм линейных пространств. Теорема об изоморфизме пространству векторов-строк.

19. Теорема об изоморфизме линейных пространств.

20. Определение подпространства. Примеры. Критерий подпространства. Построение подпространств с помощью линейных оболочек.

21. Пересечение и сумма подпространств. Теорема о размерности суммы подпространств.

22. Операторы линейных пространств. Примеры. Теорема о существовании достаточного числа операторов.

23. Связи между двумя базисами и между координатами одного вектора в этих базисах.

24. Матрица оператора, примеры. Выражение координат вектора $f(x)$ через матрицу A оператора f.

25. Теорема о связи между матрицами оператора в различных базисах. Подобные матрицы.

26. Образ и ядро оператора. Ранг и дефект. Теорема о сумме ранга и дефекта оператора.

27. Сумма и произведение операторов. Кольцо операторов $E(V)$. Теорема об изоморфизме кольца операторов $E(V)$ и кольца матриц $M(n, F)$.

28. Понятие алгебры над полем. Определение изоморфизма алгебр. Теорема об изоморфизме алгебры операторов $E(V)$ и алгебры матриц $M(n, F)$.

29. Мультипликативная группа кольца. Определение обратимого оператора. Теорема об изоморфизме групп $U(E(V))$ и $GL(n, F)$.

30. Теорема об обратимых операторах (критерии обратимости оператора).

31. Собственные векторы и собственные значения оператора. Примеры. Собственные подпространства. Предложение о линейной независимости собственных векторов.

32. Характеристическая матрица оператора. Характеристический многочлен, его независимость от выбора базиса. Спектр оператора и его инвариантность. Теорема о совпадении собственных значений и характеристических корней.

33. Алгоритмы нахождения собственных значений и собственных векторов оператора. Пример.

34. Диагонализируемые операторы. Критерий диагонализируемости на языке собственных векторов.

35. Критерий диагонализируемости оператора на языке кратностей его характеристических корней.

36. Инвариантные подпространства, примеры. Связь между наличием инвариантных подпространств и клеточными треугольными и диагональными матрицами.

37. Индуцированный оператор на инвариантном подпространстве. Теорема о характеристическом многочлене такого оператора.

Примеры задач

1-й семестр

1. Найти $(i-1)^{471}$.

2-й семестр

1. Найти все рациональные корни многочлена $2x^3 + 3x^2 + 6x - 4$.

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно»:

Критерии оценивания результатов обучения			
Неудовлетворительно	Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
Студент не владеет навыками поиска учебной литературы, имеет пробелы	Студент допускает существенные погрешности в	Студент обнаруживает хорошее знание учебного материала, успешно	Студент обнаруживает всестороннее и систематическое

в знании основного учебного материала, допускает принципиальные ошибки в выполнении предусмотренных программой практических заданий и не может продолжить обучение без дополнительных занятий по дисциплине.	ответе на экзамене, но обладает необходимыми знаниями для их устранения под руководством преподавателя.	выполняет большинство предусмотренных программой практических заданий и знаком с основной учебной литературой, а также способен к дальнейшему пополнению и обновлению своих знаний под руководством преподавателя.	знание учебного материала, успешно выполняет предусмотренные программой практические задания, а также способен к дальнейшему самостоятельному пополнению и обновлению своих знаний.

Указанная в таблице оценка может быть снижена на один балл, если средняя оценка студента за контрольные работы семестра не превышает «удовлетворительно».

11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «Moodle» - https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=5443 (первый семестр), https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=24325 (второй семестр).

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

в) План практических занятий по дисциплине.

Тема	Количество часов
Семестр 1	
Тема 1. Множества и операции над ними. Целые числа. Наибольший общий делитель. Основная теорема арифметики. Перестановки, их четность, транспозиции. Подстановки и их умножение. Матрицы и подматрицы. Действия над матрицами и их свойства. Определители и их свойства. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа и следствия из нее. Невырожденные матрицы и обратная матрица. Базис и ранг системы векторов. Ранг матрицы и его вычисление.	16
Тема 2. Теорема Крамера, формулы Крамера. Теорема Кронекера – Капелли о совместности системы. Общее решение системы линейных уравнений, алгоритм его нахождения. Метод последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса). Системы линейных однородных уравнений. Теорема о существовании фундаментальной системы решений. Алгоритм построения фундаментальной системы решений.	8
Тема 3. Бинарные алгебраические операции и их свойства. Нейтральный и симметричный элементы, их единственность. Группы и подгруппы. Числовые группы. Симметрическая и знакопеременная группы, группы диэдра. Полная линейная группа и ее подгруппы. Кольца и подкольца. Делители нуля и обратимые элементы. Числовые кольца, кольца матриц, кольца вычетов. Поля и подполя. Простые поля. Полная линейная группа и кольцо матриц над полем. Изоморфизмы групп и колец.	18
Тема 4. Расширение поля. Построение поля комплексных чисел. Операции над комплексными числами в алгебраической форме. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра. Извлечение корня из комплексного числа. Комплексные корни из единицы. Первообразные корни как образующие группы корней из единицы. Присоединение элемента к полю. Теорема о единственности поля комплексных чисел.	6

Семестр 2	
Тема 5. Кольцо многочленов над полем. Алгоритм Евклида. Неприводимые многочлены. Основная теорема о разложении многочлена на множители.	4
Тема 6. Корни многочленов. Теорема Безу и ее следствия. Кратные корни многочлена. Теорема о понижении кратности корня при переходе к производной, следствие из этой теоремы. Основная теорема алгебры многочленов (теорема Гаусса) и ее следствия.	4
Тема 7. Линейные пространства. Базисы и размерность пространства. Теорема об изоморфизме линейных пространств.	4
Тема 8. Критерий подпространства. Построение подпространств с помощью линейных оболочек. Связи между двумя базисами и между координатами одного вектора в этих базисах.	4
Тема 9. Операторы линейных пространств. Образ и ядро оператора. Ранг и дефект. Критерии обратимости оператора.	4
Тема 10. Понятие алгебры над полем. Изоморфизм алгебр.	6
Тема 11. Собственные векторы и собственные значения оператора. Собственные подпространства. Спектр оператора и его инвариантность. Алгоритм нахождения собственных значений и собственных векторов оператора.	6

12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры. М.: Факториал Пресс, 2001. – 544 с.
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч. 1. М.: МЦНМО, 2020. – 272 с.
3. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч. 2. М.: МЦНМО, 2018. – 368 с.
4. Кочетков Е.С. Линейная алгебра. М.: Форум, 2017. – 416 с.
5. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. М.: Высшая школа, 1979. – 559 с.
6. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Бином, 2005. – 383 с.
7. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. М.: Наука, 1977. – 288 с.

б) дополнительная литература:

1. Босс В. Лекции по математике: Линейная алгебра. М.: Ленанд, 2019. – 224 с.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. М.: Физматлит, 2014. – 280 с.
3. Куликов Л.Я., Москаленко А.И., Фомин А.А. Сборник задач по алгебре и теории чисел. М.: Просвещение, 1993. – 288 с.

в) ресурсы сети Интернет:

– Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» – http://journals.tsu.ru/mathematics/

13. Перечень информационных технологий

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

– публично доступные облачные технологии (Google Docs, Яндекс диск и т.п.).

б) информационные справочные системы:

– Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ – http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system

– Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ – http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index

– ЭБС Лань – http://e.lanbook.com/

– ЭБС Консультант студента – http://www.studentlibrary.ru/

– Образовательная платформа Юрайт – https://urait.ru/

– ЭБС ZNANIUM.com – https://znanium.com/
– ЭБС IPRbooks – http://www.iprbookshop.ru/

14. Материально-техническое обеспечение

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

15. Информация о разработчиках

Тимошенко Егор Александрович, доктор физико-математических наук, доцент, кафедра алгебры, профессор