

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ:

Декан

 Л. В. Гензе

« 21 » 06 20 22 г.

Рабочая программа дисциплины

**Дополнительные главы алгебры**

по направлению подготовки

**01.03.01 Математика**

Направленность (профиль) подготовки:

**Основы научно-исследовательской деятельности в области математики**

Форма обучения

**Очная**

Квалификация

**Бакалавр**

Год приема

**2022**

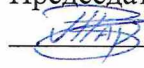
Код дисциплины в учебном плане: Б1.В.3.01

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОП

 Л.В. Гензе

Председатель УМК

 Е.А. Тарасов

Томск – 2022

## **1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины**

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики как для использования в профессиональной деятельности, так и для консультирования.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Демонстрирует навыки работы с профессиональной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам

ИОПК 1.2 Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин

ИОПК 1.3 Владеет фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук

## **2. Задачи освоения дисциплины**

– Освоить аппарат дисциплины и получить прочные теоретические знания и практические навыки для возможности дальнейшего развития теоретико-числовых алгоритмов.

– Научиться применять понятийный аппарат теоретико-числовых алгоритмов для решения практических задач профессиональной деятельности.

## **3. Место дисциплины в структуре образовательной программы**

Дисциплина относится к Блоку 1 «Дисциплина (модули)».

Дисциплина относится к обязательной части образовательной программы.

## **4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине**

Пятый семестр, экзамен

## **5. Входные требования для освоения дисциплины**

Для успешного освоения дисциплины требуются результаты обучения по следующим дисциплинам: «Алгебра» в объеме 1 курса.

## **6. Язык реализации**

Русский

## **7. Объем дисциплины**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 5 з.е., 180 часов, из которых:

-лекции: 48 ч.

-практические занятия: 48 ч.

в том числе практическая подготовка: 0 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

## **8. Содержание дисциплины, структурированное по темам**

### **Тема 1. Алгебра многочленных матриц**

Каноническая форма, ее единственность. Эквивалентность  $\lambda$ -матриц, критерии эквивалентности. Инвариантные множители. Унимодулярные  $\lambda$ -матрицы. Элементарные делители. Кольцо матричных многочленов. Делимость матричных многочленов. Основная теорема о подобии числовых матриц.

### **Тема 2. Жорданова нормальная форма**

Приведение матриц к жордановой нормальной форме (алгебраический подход). Минимальный многочлен. Теорема Гамильтона-Кэли. Алгоритмы.

### **Тема 3. Элементы теории групп**

Примеры групп. Понятие подгруппы. Порождающие множества. Таблицы Кэли. Гомоморфизмы групп. Теорема Кэли. Разложение группы по подгруппе. Теорема Лагранжа и ее следствия. Факторгруппы. Теоремы о циклических группах. Теоремы о гомоморфизмах. Коммутатор. Коммутант группы. Примеры. Теорема о коммутанте. Центр группы. Простые группы. Работы Э. Галуа и их роль в развитии теории групп. Последние достижения теории групп.

### **Тема 4. Элементы теории колец**

Примеры колец. Группа обратимых элементов кольца. Алгебраические и трансцендентные элементы. Целостные кольца (коммутативные области целостности). Понятие идеала. Факторкольца. Теоремы о гомоморфизмах колец. Прямые суммы и прямые произведения колец. Операции над идеалами. Китайская теорема об остатках и ее следствия.

### **Тема 5. Разложения на простые множители**

Простые элементы целостных колец. Ассоциированные элементы. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Евклидовы кольца. Примеры. Алгоритм Евклида. Примеры колец с разложением на простые множители. Кольцо целых гауссовых чисел. Кольца главных идеалов. Факториальные кольца. Примеры. Факториальность колец главных идеалов. Содержание многочлена. Лемма Гаусса. Неприводимые многочлены. Критерий неприводимости Эйзенштейна. Факториальность колец многочленов над факториальными кольцами.

**Тема 6. Элементы теории полей.** Характеристика поля. Критерии подкольца и подполя. Расширения полей. Алгебраически замкнутые поля. Теорема Штейница (б/д). Существование конечных полей. Алгебраические и трансцендентные расширения полей. Поле разложения многочлена.

**Тема 7. Евклидовы пространства** Примеры евклидовых пространств. Неравенство Коши-Буняковского. Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта. Ортогональные базисы и ортогональные матрицы. Проекция вектора на подпространство.

**Тема 8. Операторы евклидовых и эрмитовых пространств.** Унитарные операторы и унитарные матрицы. Их свойства. Ортогональные базисы унитарных пространств. Оператор, сопряженный к данному. Критерий сопряженности. Самосопряженные операторы. Неотрицательные самосопряженные линейные операторы, канонический вид этих операторов. Алгоритмы.

**Тема 9. Билинейные и квадратичные формы.** Связь матрицы билинейной формы в разных базисах. Квадратичные формы. Канонический вид формы. Метод Лагранжа приведения квадратичные формы к каноническому виду. Закон инерции квадратичные формы. Квадратичные формы в евклидовых пространствах. Приведение к главным осям. Алгоритмы. Распадающиеся квадратичные формы.

## 9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, проведения контрольных работ, тестов по лекционному материалу, деловых игр по темам, выполнения домашних заданий, и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр.

## 10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Экзамен в пятом семестре проводится в письменной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из трех частей. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

Примеры вопросов первой части:

А) Пусть группа имеет счетное множество порождающих элементов. Что можно сказать о мощности самой группы?

Выберите один ответ:

1. Группа имеет не более, чем счетную мощность.
2. Мощность самой группы может быть произвольной.
3. Группа имеет счетную мощность.
4. Группа имеет не более, чем континуальную мощность.
5. Если порядки порождающих элементов конечны, то группа конечна.

Б) Выберите один ответ:

1. Абелевой в честь норвежского математика Н. Абеля.
2. Перестановочной.
3. Симметрической.
4. Хорошей.
5. Суммируемой.

Примеры вопросов второй части:

1. Докажите теорему о коммутанте группы.
2. Докажите теорему о единственности канонического вида  $\lambda$ -матрицы.
3. Докажите теорему о методе Лагранжа приведения квадратичные формы к каноническому виду.

Примеры вопросов второй части.

А) теоретические вопросы.

- 1) Дайте определение ядра кольцевого гомоморфизма, будет ли это ядро идеалом кольца?
- 2) Является ли пересечение некоторого семейства подгрупп данной группы подгруппой исходной группы? И что можно сказать об объединении подгрупп этого семейства?
- 3) Что называется характеристикой поля, каковы свойства этой характеристики?

Б) Примеры задач.

1) Следующую ортонормированную систему векторов дополнить до ортонормированного базиса:  $a = (2/3, -1/3, 2/3)$ ,  $b = (1/3, -2/3, -2/3)$ .

2) Найти нормальный вид в области вещественных чисел следующей квадратичной формы  $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - x_4^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 6x_2x_4$ .

3) При помощи элементарных преобразований привести к каноническому виду.

$$\begin{pmatrix} \lambda + 1 & \lambda^2 + 1 & \lambda^2 + 3\lambda \\ \lambda^3 + 1 & \lambda^2 - 2 & \lambda + 3 \\ 5\lambda & 3\lambda^2 + 1 & \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Инд. задание в системе Moodle.	20%	В течение семестра	По 100 бальной системе.
Тесты в системе Moodle.	20%	В течение семестра	Максимальное использование возможностей программы
Экзамен	60%	В конце семестра	Студент допускается до экзамена только при наличии выполненных индивидуального задания и теста. 1) Полный ответ, изложенный кратко и ясно – «отлично». 2) Ответ неполный (но > 70%), пояснения логически непротиворечивы – «хорошо». 3) Ответ неполный (но >50%), отсутствие логики в пояснениях – «удовлетворительно». 4) Ответ неполный (<50%), отсутствие логики в

			пояснениях или по сути отсутствует – «неудовлетворительно».
--	--	--	--

## 11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «Moodle» - <https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=24327>

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

в) План семинарских / практических занятий по дисциплине.

Наименование разделов и тем	Всего (час.)	Контактная работа (час.)		Самостоятельная работа (час.)
		Лекции	Лабораторная работа	
<p><b>Тема 1. Алгебра многочленных матриц</b></p> <p>Каноническая форма, ее единственность. Эквивалентность <math>\lambda</math>-матриц, критерии эквивалентности. Инвариантные множители. Унимодулярные <math>\lambda</math>-матрицы. Элементарные делители. Кольцо матричных многочленов. Делимость матричных многочленов. Основная теорема о подобии числовых матриц.</p>	6	6		
<p><b>Тема 2. Жорданова нормальная форма</b></p> <p>Приведение матриц к жордановой нормальной форме (алгебраический подход). Минимальный многочлен. Теорема Гамильтона-Кэли. Алгоритмы.</p>	4	4		
<p><b>Тема 3. Элементы теории групп</b></p> <p>Примеры групп. Понятие подгруппы. Порождающие множества. Таблицы Кэли. Гомоморфизмы групп. Теорема Кэли. Разложение группы по подгруппе. Теорема Лагранжа и ее следствия. Факторгруппы. Теоремы о циклических группах. Теоремы о гомоморфизмах. Коммутатор. Коммутант группы. Примеры. Теорема о коммутанте. Центр группы. Простые группы. Работы Э. Галуа и их роль в развитии теории групп. Последние достижения теории групп.</p>	6	6		
<p><b>Тема 4. Элементы теории колец</b></p> <p>Примеры колец. Группа обратимых элементов кольца. Алгебраические и трансцендентные элементы. Целостные кольца (коммутативные области целостности). Понятие идеала. Факторкольца. Теоремы о гомоморфизмах колец. Прямые суммы и прямые произведения колец. Операции над идеалами. Китайская теорема об остатках и ее следствия.</p>	6	6		
<p><b>Тема 5. Разложения на простые множители</b></p> <p>Простые элементы целостных колец. Ассоциированные элементы. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Евклидовы кольца. Примеры. Алгоритм Евклида. Примеры колец с разложением на простые множители. Кольцо целых гауссовых чисел. Кольца главных идеалов. Факториальные кольца. Примеры. Факториальность колец главных идеалов.</p>	6	6		

Содержание многочлена. Лемма Гаусса. Неприводимые многочлены. Критерий неприводимости Эйзенштейна. Факториальность колец многочленов над факториальными кольцами.				
<b>Тема 6. Элементы теории полей.</b> Характеристика поля. Критерии подкольца и подполя. Расширения полей. Алгебраически замкнутые поля. Теорема Штейница (б/д). Существование конечных полей. Алгебраические и трансцендентные расширения полей. Поле разложения многочлена.	4	4		
<b>Тема 7. Евклидовы пространства</b> Примеры евклидовых пространств. Неравенство Коши-Буняковского. Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта. Ортогональные базисы и ортогональные матрицы. Проекция вектора на подпространство.	6	6		
<b>Тема 8. Операторы евклидовых и эрмитовых пространств.</b> Унитарные операторы и унитарные матрицы. Их свойства. Ортогональные базисы унитарных пространств. Оператор, сопряженный к данному. Критерий сопряженности. Самосопряженные операторы. Неотрицательные самосопряженные линейные операторы, канонический вид этих операторов. Алгоритмы.	6	6		
<b>Тема 9. Билинейные и квадратичные формы.</b> Связь матрицы билинейной формы в разных базисах. Квадратичные формы. Канонический вид формы. Метод Лагранжа приведения квадратичные формы к каноническому виду. Закон инерции квадратичные формы. Квадратичные формы в евклидовых пространствах. Приведение к главным осям. Алгоритмы. Распадающиеся квадратичные формы.	4	4		
Итого	48	48		

г) Методические указания по проведению лабораторных работ.

Полностью и своевременно выполнять домашние задания и тесты. Для контроля следует использовать материалы лекций и семинарских занятий.

д) Методические указания по организации самостоятельной работы студентов.

Чтение основной литературы, указанной в нижеприводимом списке. Для контроля усвоения материала следует самостоятельно повторять доказательства основных теорем курса, а также решать задачи и упражнения, указанные в литературе, использовать электронные ресурсы.

## 12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру. МЦНМО. Ч. 2. 2020. 368 с.
2. Глухов М.М., Елизаров В.П., Нечаев А.А. Алгебра. М.: Лань, 2022. 608 с.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. ФИЗМАТЛИТ. 2014. 280 с.
4. Окунев Л.Я. Высшая алгебра. С-Петербург: Лань, 2022. 336 с.
5. Фадеев Д.К., Фадеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. С-Петербург: Лань, 2021. 736 с.
6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. С-Петербург: Лань, 2022. 432 с.
7. Проскураков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. С-Петербург: Лань, 2021. 476 с.

б) дополнительная литература:

1. Ляпин Е.С., Айзенштат А.Я., Лесохин. Упражнения по теории групп. С-Петербург: Лань, 2021. 2-е

изд. стер. 272 с.

2. Крылов П.А., Туганбаев А.А., Чехлов А.Р. Упражнения по теории колец, модулей и полей. М.: Факториал Пресс. 2007.
3. Понтрягин Л.С. Алгебра. Знакомство с высшей математикой. УРСС. 2010. 176 с.
4. Босс В. Лекции по математике. Т. 8 Теория групп. УРСС. 2013. 216 с.

в) ресурсы сети Интернет. Открытые онлайн-курсы:

1. <https://teach-in.ru/course/additional-chapters-of-algebra-kanunnikov/materials>
2. <https://evgenev.ru/free-algebra-courses/>
3. <https://lala.lanbook.com/besplatnye-kursy-topovyh-universitetov-mira-v-2022>

4. – сайт журнала «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика»

<http://journals.tsu.ru/mathematics/>

### 13. Перечень информационных технологий

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

- Microsoft Office Standart 2013 Russian: пакет программ. Включает приложения: MS Office Word, MS Office Excel, MS Office PowerPoint, MS Office OneNote, MS Office Publisher, MS Outlook, MS Office Web Apps (Word Excel MS PowerPoint Outlook);
- публично доступные облачные технологии (Google Docs, Яндекс диск и т.п.).

б) информационные справочные системы:

– Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ – <http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system>

– Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ – <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index>

– ЭБС Лань – <http://e.lanbook.com/>

– ЭБС Консультант студента – <http://www.studentlibrary.ru/>

в) профессиональные базы данных:

– [Web of Science](https://lib.tusur.ru/ru/resursy/bazy-dannyh/web-of-science) <https://lib.tusur.ru/ru/resursy/bazy-dannyh/web-of-science>

– [Scopus](https://lib.tusur.ru/ru/resursy/bazy-dannyh/scopus) <https://lib.tusur.ru/ru/resursy/bazy-dannyh/scopus>

– [zbMATH](https://lib.tusur.ru/ru/resursy/bazy-dannyh/zbmath) <https://lib.tusur.ru/ru/resursy/bazy-dannyh/zbmath>

– [Архив журналов РАН](https://lib.tusur.ru/ru/resursy/bazy-dannyh/arhiv-zhurnalov-ran) <https://lib.tusur.ru/ru/resursy/bazy-dannyh/arhiv-zhurnalov-ran>

– Университетская информационная система РОССИЯ – <https://uisrussia.msu.ru/>

### 14. Материально-техническое обеспечение

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

Лаборатории 2-го корп., оборудованные для проведения занятий в Moodle: 324, 316 и 319.

Аудитории для проведения занятий лекционного и семинарского типа индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации в смешанном формате («Актру»). Это аудитории 2-го корп.: 428, 121, 124, 302, 411, 423.

### 15. Информация о разработчиках

Чехлов Андрей Ростиславович, д.ф.-м.н., профессор каф. алгебры ТГУ.

