

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДАЮ:  
Директор



« 19 » 20 22 г.

Рабочая программа дисциплины

**Математический анализ**

по направлению подготовки / специальности

**10.05.01 Компьютерная безопасность**

Направленность (профиль) подготовки / специализация:

**Анализ безопасности компьютерных систем**

Форма обучения

**Очная**

Квалификация

**Специалист по защите информации**

Год приема

**2022**

Код дисциплины в учебном плане: Б1.О.02.01

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОП

 В.Н. Тренькаев

Председатель УМК

 С.П. Сущенко

Томск – 2022

## **1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины**

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

– ОПК-3 – Способен на основании совокупности математических методов разрабатывать, обосновывать и реализовывать процедуры решения задач профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК-3.1 Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач, формулируемых в рамках базовых математических дисциплин.

ИОПК-3.2 Осуществляет применение основных понятий, фактов, концепций, принципов математики и информатики для решения задач профессиональной деятельности.

ИОПК-3.3 Выявляет научную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, и применяет соответствующий математический аппарат для их формализации, анализа и выработки решения.

## **2. Задачи освоения дисциплины**

– освоить методы математического анализа, необходимые как при изучении остальных курсов, так и для решения прикладных задач в разных предметных областях;

- уметь применять понятийный аппарат дисциплины для корректного моделирования на основе вычислительной техники с привлечением теории пределов функций, дифференцирования, интегрирования и разложения функций в ряды

## **3. Место дисциплины в структуре образовательной программы**

Дисциплина относится к обязательной части образовательной программы. Дисциплина входит в модуль "Математика".

## **4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине**

Первый семестр, зачет

Первый семестр, экзамен

Второй семестр, зачет

Второй семестр, экзамен

Третий семестр, зачет

Третий семестр, экзамен

Четвертый семестр, зачет

Четвертый семестр, экзамен

## **5. Входные требования для освоения дисциплины**

Для успешного освоения дисциплины требуются компетенции, сформированные в ходе освоения образовательных программ предшествующего уровня образования.

## **6. Язык реализации**

Русский

## **7. Объем дисциплины**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 24 з.е., 864 часов, из которых:

-лекции: 256 ч.

-практические занятия: 256 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

## **8. Содержание дисциплины, структурированное по темам**

Тема 1. Действительные числа, пределы числовых последовательностей  
Предел последовательности. Свойства предела.

Тема 2. Действительные функции действительной переменной.  
Предел функции и его свойства. Основные типы пределов. Производные и дифференциалы. Исследование функций и построение графиков.

Тема 3. Интегральное исчисление функций действительной переменной.  
Неопределенный интеграл. Интегралы Римана, Стильтьеса. Способы вычисления.

Тема 4. Ряды с действительными и комплексными членами. Функциональные ряды.  
Разложение функций в степенной ряд.

Тема 5. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.  
Дифференцирование. Обратные отображения и неявные функции. Безусловный и условный экстремум.

Тема 6. Ряды Фурье.  
Разложение функций в ряд Фурье. Свойства ряда Фурье. Почленное дифференцирование, интегрирование.

Тема 7. Интегралы, зависящие от параметра. Свойства, способы вычисления. Гамма и бета функции.

Тема 8. Кратные интегралы.  
Мера Жордана. Интегрирование по измеримым множествам. Свойства интеграла. Методы вычисления.

Тема 9, Теория поля. Криволинейные и поверхностные интегралы.  
Свойства интегралов. Способы вычисления. Приложения геометрические и физические.

Тема 10. Теория функций комплексной переменной.  
Дифференцирование, интегрирование. Ряд Лорана. Особые точки. Вычеты. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Преобразование Фурье и Лапласа.

Тема 12. Дифференциальные уравнения.  
Основные типы дифференциальных уравнений первого порядка и способы их решения. Системы линейных дифференциальных уравнений.

## **9. Текущий контроль по дисциплине**

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, проведения контрольных работ, выполнения домашних заданий и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр.

## 10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Экзамен в каждом семестре проводится в письменной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из трех вопросов и содержит вопросы по теории. Продолжительность экзамена 1,5 часа. Во время экзамена проверяется достижение ИОПК-3.2, ИОПК-3.3.

Зачет в каждом семестре ставится по результатам выполнения домашних заданий и решения контрольных работ. Получение зачета по практике является необходимым условием для допуска к экзамену. Во время зачета проверяется достижение ИОПК-3.1, ИОПК-3.2.

Примерный перечень теоретических вопросов

1. Производная функции, заданной параметрически.
2. Дифференциал функции.
3. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница.
4. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши.
5. Правило Лопиталя.
6. Определение точки экстремума.
7. Необходимое условие экстремума.
8. Достаточные условия экстремума.
9. Свойства интеграла Римана как функции верхнего предела интегрирования. Существование первообразной у интегрируемой, непрерывной функций. Формула Ньютона-Лейбница.
10. Замена переменной, интегрирование по частям в определенном интеграле.
11. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.
12. Геометрические приложения определенного интеграла. Вычисление площади плоских фигур, объема, тела вращения. Спрямолинейные кривые; длина кривой.
13. Теорема о приведении кратного интеграла к последовательным однократным.
14. Формула замены переменной в кратном интеграле.
15. Несобственные кратные интегралы.
16. Вычисление интеграла Пуассона.
17. Криволинейные интегралы первого рода. Определение, свойства. Способ вычисления.
18. Криволинейные интегралы второго рода. Определение, свойства. Способ вычисления.
19. Формула Грина. Вычисление площадей с помощью криволинейных интегралов.
20. Теорема о представлении аналитической в круге функции в виде степенного ряда.
21. Разложение аналитической функции в ряд Лорана. Нахождение коэффициентов.
22. Изолированные особые точки и их классификация.
23. Вычет функции в изолированной особой точке. Вычисление вычета в полюсе первого порядка (2 формулы), в полюсе произвольного порядка.
24. Основная теорема теории вычетов.
25. Вычисление определенного интеграла на бесконечном промежутке с помощью вычетов.
26. Вычисление определенного интеграла на конечном промежутке с помощью вычетов.
27. Преобразование Лапласа. Свойства.

Примеры задач:

Вариант 1	Вариант 2
<p>1. Вычислить интеграл <math>\iint_D \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dx dy</math>, где область <math>D</math> задана неравенствами <math>1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2</math>, <math>y - x \geq 0</math>.</p>	<p>1. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: <math>z = \ln(1 + x^2 + y^2)</math>, <math>x^2 + y^2 = 2</math>, <math>z = 0</math></p>
<p>2. Вычислить тройной интеграл: <math>\iiint_G \frac{dG}{(1 + x + y + z)^3}</math>, если область интегрирования задана уравнениями: <math>G: x + y = 3</math>, <math>x = 0</math>, <math>y = 2</math>, <math>z = 0</math>.</p>	<p>2. Найти объем тела, ограниченного поверхностью <math>\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z</math>, <math>\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1</math>, <math>z = 0</math>, <math>b &gt; a &gt; 0</math></p>
<p>3. Найти объем тела, ограниченного поверхностью</p>	<p>3. Вычислить тройной интеграл <math>I = \iiint_T ((x + y)^2 - z) dx dy dz</math>, где <math>T</math> - область, ограниченная поверхностями:</p>

$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$ $x^2 + y^2 + z^2 = 16,$ $z^2 = x^2 + y^2,$ $y = 0, z = 0, y = x,$ $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$	$z = 0, (z - 1)^2 = x^2 + y^2.$
--	---------------------------------

<p><b>Вариант 1</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Разложить функцию <math>(-x)</math> в ряд Фурье на отрезке <math>[-\pi, \pi]</math> в тригонометрической форме.</li> <li>2. Найти разложение функции <math>f(x)=a, x \in[-\pi, 0), f(x)=-a, x \in(0, \pi], a &gt; 0</math> комплексный ряд Фурье.</li> <li>3. Доказать равенство Парсеваля, привести его тригонометрическую и комплексную формы.</li> </ol>	<p><b>Вариант 2</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Разложить функцию <math>f(x)=(x/3)</math> в тригонометрический ряд Фурье на отрезке <math>[-3, 3]</math>.</li> <li>2. Разложить функцию <math>f(x)= x </math> в ряд Фурье на отрезке <math>[-1, 1]</math> в комплексной форме.</li> <li>3. Доказать, что в пространстве <math>L_2[-a, a]</math> система функций <math>(1, \cos kt, \sin kt)_{k \in \mathbb{N}}</math> ортогональная.</li> </ol>
---	---

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценки при проведении экзамена формируются в соответствии с нижеприведенной таблицей.

2	3	4	5
Не ответил ни на один из вопросов.	Ответил на один из основных вопросов и на один - два частично.	Ответил на вопросы, содержащиеся в экзаменационном билете, но с замечаниями.	Правильно ответил на все вопросы.

## 11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «Moodle» - <https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=00000>

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине (Приложение 1).

в) План семинарских / практических занятий по дисциплине.

### Раздел 1. Действительные числа, пределы числовых последовательностей

Введение в множества действительных чисел. Аксиомы  $\mathbb{R}$ . Верхние и нижние грани числовых множеств.

Теорема о вложенных отрезках

Числовые последовательности и их пределы (по Коши, по Гейне).

Свойства пределов последовательностей. Число  $e$ .

Частичные пределы, верхний и нижний пределы и их свойства.

Теорема Больцано-Вейерштрасса и критерий Коши.

### Раздел 2. Действительные функции действительной переменной. Производные и дифференциалы.

Определение предела функции в точке по Коши и Гейне. Свойства предела функции в точке (основные теоремы).

Первый и второй замечательные пределы и следствия из них.

Определение непрерывной функции в точке. Свойства непрерывных функций (арифметические операции, сложная функция, обратная функция).

Точки разрыва. Свойства непрерывных на отрезке функций (теорема Вейерштрасса, Кантора).

Определение производной. Правила дифференцирования. Таблица производных. Производная сложной функции. Производная функции, заданной параметрически.

Дифференциал функции. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя.

Определение точки экстремума. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия экстремума. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба. Теоремы о выпуклых функциях. Асимптоты. Способы нахождения.  
Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, Коши. Формула Тейлора для элементарных функций.

**Раздел 3.** Интегральное исчисление функций действительной переменной. Интегралы Римана. Первообразная. Неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Формула замены переменной в неопределенном интеграле. Формула интегрирования по частям в неопределенном интеграле. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование элементарных дробей. Определенный интеграл. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Суммы Дарбу и их свойства. Определенный интеграл. Критерий интегрируемости. Интегральные суммы Римана. Классы интегрируемых функций (непрерывные, монотонные, кусочно - непрерывные). Теорема Дарбу. Свойства определенного интеграла. Неравенства, теоремы о среднем. Интегрируемость произведения интегрируемых функций. Свойства интеграла Римана как функции верхнего предела интегрирования. Существование первообразной у интегрируемой, непрерывной функций. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной, интегрирование по частям в определенном интеграле. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Геометрические приложения определенного интеграла. Вычисление площади плоских фигур, объема тела вращения. Спрямолинейные кривые; длина кривой. Несобственные интегралы первого и второго рода. Абсолютная и условная сходимость. Признаки сходимости: сравнения, Дирихле, Абеля.

**Раздел 4.** Ряды с действительными и комплексными членами. Функциональные ряды. Ряды с действительными и комплексными членами. Функциональные ряды. Степенные ряды. Числовой ряд, его сходимость и сумма. Критерий Коши. Абсолютная и условная сходимость рядов. Основные признаки сходимости числовых рядов.: сравнения, интегральный, Даламбера, Коши, Лейбница, Дирихле, Абеля. Перестановка членов абсолютно и условно сходящихся рядов, теорема Римана. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость. Признаки равномерной сходимости. Теоремы о равномерно сходящихся последовательностях и рядах: непрерывность предельной функции и суммы ряда, почленное дифференцирование и интегрирование. Степенные ряды. Теоремы Абеля. Интервал и радиус сходимости. Разложение функций в степенные ряды

**Раздел 5.** Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных. Обратные отображения и неявные функции. Векторные функции нескольких переменных. Непрерывность, дифференцируемость. Дифференцируемость сложной функции. Производная по направлению, свойства. Частные производные. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости. Производные и дифференциалы высших порядков. Свойства смешанных частных производных. Формула Тейлора. Локальный экстремум. Необходимое, достаточное условие экстремума

**Раздел 6.** Мера Жордана. Кратные интегралы. Интегралы, зависящие от параметра. Интегралы, зависящие от параметра. Непрерывность, интегрирование и дифференцирование по параметру. Несобственные интегралы, зависящие от параметра, равномерная сходимость. Признаки равномерной сходимости Вейерштрасса, Дирихле, Абеля. Свойства равномерно сходящихся несобственных интегралов. Непрерывность, интегрирование и дифференцирование по параметру несобственных интегралов. Бета-функция и гамма-функция и их свойства. Основная теорема о гамма-функции. Кратные интегралы. Суммы Дарбу, верхний и нижний интегралы. Интегралы по брусу. Интегрируемость непрерывной функции. Свойства интеграла. Множества, измеримые по Жордану. Внутренняя мера. Свойства измеримых множеств. Цилиндрические множества. Интеграл по измеримым множествам.. Теорема о приведении кратного интеграла к последовательным однократным. Формула замены переменной в кратном интеграле. Несобственные кратные интегралы. Вычисление интеграла Пуассона.

**Раздел 7.** Теория поля. Криволинейные и поверхностные интегралы. Криволинейные интегралы первого рода. Определение, свойства. Способ вычисления. Криволинейные интегралы второго рода. Определение, свойства. Способ вычисления. Формула Грина. Вычисление площадей с помощью криволинейных интегралов. Поверхностные интегралы первого и второго рода. Способы вычисления.

Дивергенция, ротор. Формула Остроградского-Гаусса. Формула Стокса.

#### **Раздел 8.** Ряды Фурье. Интеграл Фурье.

Ряды Фурье. Тригонометрическая система, свойства. Нахождение коэффициентов. Минимальное свойство коэффициентов Фурье. Стремление коэффициентов к нулю.

Частичные суммы ряда Фурье. Ядро Дирихле. Принцип локализации. Сходимость ряда Фурье в точке.

Теорема Дини. Сумма Фейера. Ядро Фейера. Теорема Фейера.

Интегрирование, дифференцирование Рядов Фурье. Неравенство Бесселя.

#### **Раздел 9.** Теория функций комплексной переменной. Дифференцирование, интегрирование.

Производная функции комплексной переменной. Аналитические функции. Условия Коши-Римана.

Достаточные условия дифференцируемости. Интегрирование функции комплексной переменной. Свойства.

Теорема Коши. Формула Коши. Принцип максимума модуля для аналитических функций.

Интегралы, зависящие от параметра. Теорема об аналитичности производной. Существование производных всех порядков у аналитической функции. Теорема Лиувилля.

Теорема о представлении аналитической в круге функции в виде степенного ряда. Теорема единственности аналитических функций.

#### **Раздел 10.** Ряд Лорана. Особые точки. Вычеты.

Ряд Лорана. Область сходимости. Разложение аналитической функции в ряд Лорана. Нахождение коэффициентов.

Изолированные особые точки и их классификация. Свойство существенно особой точки (теорема Сохоцкого - Вейерштрасса). Свойство полюса. Свойство устранимой особой точки.

Вычет функции в изолированной особой точке. Вычисление вычета в полюсе первого порядка (2 формулы), в полюсе произвольного порядка. Основная теорема теории вычетов.

#### **Раздел 11.** Вычисление интегралов с помощью вычетов. Преобразование Лапласа.

Вычисление определенного интеграла на бесконечном промежутке с помощью вычетов. Вычисление определенного интеграла на конечном промежутке с помощью вычетов. Лемма Жордана.

Логарифмический вычет. Теорема Руше.

Преобразование Лапласа. Свойства. Нахождение интеграла по изображению. Формула Меллина. Условия существования оригинала.

#### **Раздел 12.** Дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения. Общее, частное, особое решение. Общий интеграл. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения. Уравнения, приводящиеся к однородным.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Метод вариации произвольной постоянной.

Уравнения в полных дифференциалах.

Теорема Банаха о сжимающем отображении. Теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения.

Линейные уравнения n-го порядка. Существование решения. Фундаментальная система решений.

Линейные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами (однородные, неоднородные).

Построение фундаментальной системы решений. Метод вариации произвольных постоянных.

Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Матричная экспонента.

д) Методические указания по организации самостоятельной работы студентов.

## **12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет**

а) основная литература:

- Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа Т. 1 М.: Юрайт 2009. - 607 с.

- Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа Т. 3 М.: Юрайт 2016. - 350 с

- Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу М : Лань 2017. - 624 с.

- Свешников, А. Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной.

- М: Физматлит 2001. - 335 с.  
 - Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям Москва : Ленанд 2015. - 235 с.  
 - Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения М. ЛКИ 2008 - 309 с.

б) дополнительная литература:

- Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления . Т. 1 : учебник : [для студентов университетов, педагогических и технических вузов : в 3 т.] СПб. : Лань 2009. - 607 с.  
 -Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления . Т. 2 : учебник : [для студентов университетов, педагогических и технических вузов : в 3 т.]. СПб. : Лань. 2009. - 800 с.  
 -Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления . Т. 3 : учебник : [для студентов университетов, педагогических и технических вузов : в 3 т.]. СПб. : Лань. 2009. — 656 с.

в) ресурсы сети Интернет:

1. Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ [Электронный ресурс] / Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ : [сайт]. – [Томск, 2011–2016]. – URL: <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index>.  
 2. <http://exponenta.ru>  
[http://www-sbras.nsc.ru/win/mathpub/math\\_www.html](http://www-sbras.nsc.ru/win/mathpub/math_www.html)  
<http://www.mathhelp.spb.ru>  
<http://ilib.mccme.ru>  
<http://256bit.ru>

– ...

### 13. Перечень информационных технологий

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

- Microsoft Office Standart 2013 Russian: пакет программ. Включает приложения: MS Office Word, MS Office Excel, MS Office PowerPoint, MS Office OneNote, MS Office Publisher, MS Outlook, MS Office Web Apps (Word Excel MS PowerPoint Outlook);  
 – публично доступные облачные технологии (Google Docs, Яндекс диск и т.п.).

б) информационные справочные системы:

- Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ – <http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system>  
 – Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ – <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index>  
 – ЭБС Лань – <http://e.lanbook.com/>  
 – ЭБС Консультант студента – <http://www.studentlibrary.ru/>  
 – Образовательная платформа Юрайт – <https://urait.ru/>  
 – ЭБС ZNANIUM.com – <https://znanium.com/>  
 – ЭБС IPRbooks – <http://www.iprbookshop.ru/>

### 14. Материально-техническое обеспечение

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации. Специальные технические средства (проектор, компьютер и т.д.) требуются для демонстрации материала в рамках изучаемых разделов,

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

### **15. Информация о разработчиках**

Воробейчиков Сергей Эрикович, д.ф.-м.н., доцент, профессор каф. системного анализа и математического моделирования