Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ:
Декан ММФ ТГУ
Л. В.Гензе

Рабочая программа дисциплины

Математический анализ

по направлению подготовки
01.03.01 Математика
02.03.01 Математика и компьютерные науки
01.03.03 Механика и математическое моделирование

Направленность (профиль) подготовки :
Основы научно-исследовательской деятельности в области математики
Основы научно-исследовательской деятельности в области математики и компьютерных наук
Основы научно-исследовательской деятельности в области механики и математического моделирования

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2023

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
Л. В.Гензе

Председатель УМК
Е.А.Тарасов

Томск – 2023

1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики как для использования в профессиональной деятельности, так и для консультирования.

ОПК-8 Способен использовать в педагогической деятельности научные знания в сфере математики, механики, компьютерных наук и информатики.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Демонстрирует навыки работы с профессиональной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам.

ИОПК 1.2 Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин.

ИОПК 1.3 Владеет фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук.

ИОПК 8.1 Демонстрирует способность подготовить конспект или план занятия по теме из области математики, механики, компьютерных наук или информатики.

ИОПК 8.2 Выбирает подходящие источники информации для подготовки конспекта или плана занятия по выбранной теме.

2. Задачи освоения дисциплины

– Освоить теоретический аппарат и основные методы рассуждений и доказательств в математическом анализе (ИОПК 1.3)

– Научиться применять теоретический аппарат и методы математического анализа для решения практических задач профессиональной деятельности (ИОПК 1.2)

– Сформировать навык работы с учебной и профессиональной литературой, связанной с различными разделами математического анализа (ИОПК 1.1, ИОПК 8.2)

– Развить навык подготовки учебных материалов по математической дисциплине в форме конспекта или плана части практического занятия по выбранной теме (ИОПК 8.1, ИОПК 8.2)

3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к Блоку 1 «Дисциплина (модули)».

Дисциплина относится к обязательной части образовательной программы.

4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине

Первый семестр, экзамен

Второй семестр, экзамен

Третий семестр, экзамен

Четвертый семестр, экзамен

5. Входные требования для освоения дисциплины

Для успешного освоения дисциплины требуются компетенции, сформированные в ходе освоения образовательных программ предшествующего уровня образования.

Необходимо параллельное освоение дисциплин «Алгебра», «Аналитическая геометрия», «Дифференциальная геометрия».

6. Язык реализации

Русский

7. Объем дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 29 з.е., 1 044 часов, из которых:
-лекции: 256 ч.
-практические занятия: 256 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

8. Содержание дисциплины, структурированное по темам

Первый семестр

Тема 1. Введение в математический анализ: отображения, теория вещественного числа, точные грани множеств, мощность множеств.

Тема 2. Предел последовательности.

Тема 3. Предел и непрерывность вещественной функции.

Тема 4. Дифференциальное исчисление вещественной функции вещественного аргумента.

Второй семестр

Тема 1. Неопределенный интеграл. Интеграл Римана. Числовые и функциональные ряды.

Тема 2. Метрические пространства. Компактность.

Тема 3. Дифференциальное исчисление для отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$

Третий семестр

Тема 1. Теория меры Лебега в $\mathbb{R}^m$.

Тема 2. Теория интеграла Лебега в $\mathbb{R}$ и его приложения.

Тема 3. Неявные отображения. Условный экстремум.

Тема 4. Интеграл Лебега в $\mathbb{R}^m$. Теорема Фубини. Замена переменных в интеграле Лебега.

Четвертый семестр

Тема 1. Гладкие многообразия. Мера на многообразии. Криволинейный, поверхностный интегралы 1 рода.

Тема 2. Дифференциальные формы. Криволинейный, поверхностный интегралы 2 рода. Формула Стокса.

Тема 3. Ряды Тейлора и Фурье.

Тема 4. Интегралы, зависящие от параметра.

Содержание каждой темы отражено в примерных вопросах к экзамену (см.п.10).
Возможна перестановка тем внутри курса, не нарушающая логику изложения материала.

9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине проводится путем проведения контрольных работ и индивидуальных работ (ИОПК 1.2), коллоквиумов (ИОПК 1.1, ИОПК 1.3, ИОПК 8.2), выполнения домашних заданий (ИОПК 1.2), тестирований в электронной среде

(ИОПК 1.2, ИОПК 1.3), проверки наличия конспектов лекций (ИОПК 8.1), и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр.

Практическая часть оценивается в течение семестра. За практику оценка ставятся по основным темам семестра преподавателями, ведущими практические занятия, с учетом всех видов работ (ДЗ, ИДЗ, КР, собеседования, ответы на занятии, самостоятельный разбор задач повышенной сложности).

Критерий оценки **контрольной работы, индивидуального задания, домашнего задания, теста**

Неудовлетворительно	Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
<50% заданий выполнено правильно	50%-65% заданий выполнено правильно	65%-85% заданий выполнено правильно	>85% заданий выполнено правильно

10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Промежуточная аттестация реализуется путем проведения экзаменов после каждого семестра.

Вопросы по практике (задачи) направлены на оценку сформированности по индикатору компетенции ИОПК 1.2 (решение типовых задач из курса математического анализа). Вопросы по теории проверяют сформированность по индикаторам ИОПК 1.1, ИОПК 8.1 и ИОПК 8.2 (знание литературы по математическому анализу, умение восстанавливать недостающие факты и рассуждения по литературе, подготовить план ответа) , а также ИОПК 1.3 (владение фундаментальными знаниями, включая определения, формулировки и методы доказательства теорем из курса математического анализа, умение применить эти знания в конкретной ситуации).

Студенты, получившие по практике оценки 3, 4, 5, освобождаются от практической части билета со своей оценкой. Итоговая оценка за экзамен получается как среднее арифметическое оценок за практику и теорию, с округлением в сторону оценки за теорию. Если был сдан коллоквиум по теоретическому разделу, выносимому на экзамен, то студент освобождается на экзамене от вопросов по данному разделу с той оценкой, какая была за коллоквиум. В экзаменационном билете должны присутствовать вопросы по практике и теории по основным пройденным темам.

Количество вопросов зависит от их трудоемкости, не более трех вопросов по практике и трех вопросов по теории. За каждый вопрос билета должна быть получена оценка не ниже тройки. Оценка за ответ по теории на экзамене находится как среднее арифметическое ответов по каждому вопросу. При спорной оценке задаётся дополнительный вопрос.

Критерий оценивания ответа на экзамене (на подготовку и ответ на экзамене отводится 1,5 академического часа):

Критерий оценки вопроса на экзамене (коллоквиуме):

Неудовлетворительно	Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
означает неспособность студента математически верно сформулировать определения или результаты, требуемые в вопросе.	означает неспособность студента привести доказательства верно сформулированных результатов и неумение применить сформулированные определения и результаты к	означает способность студента верно сформулировать результат и привести отдельные части доказательства или решения при не способности построить	означает способность студента привести доказательства верно сформулированных результатов или умение применить сформулированные определения и результаты к

	конкретной ситуации.	логическую цепочку доказательства (решения задачи) без дополнительных указаний.	конкретной ситуации, делать необходимые обобщения и выводы.

Примерный перечень теоретических вопросов, выносимых на экзамены:

Семестр 1.

Первый вопрос билета.

1.Определить основные операции над множествами. Записать и доказать формулы двойственности де Моргана для трех множеств. Нарисовать к этим формулам диаграммы Венна – Эйлера.

2. Дать определение семейства множеств, объединения и пересечения множеств семейства. Привести примеры. Записать и доказать формулы двойственности де Моргана для семейства множеств.

3. Дать определение соответствия и отображения. Определить образ и прообраз множества при отображении. Сформулировать и доказать теорему о свойствах образов и прообразов множеств.

4. Дать определения инъекции, сюръекции, биекции. Сформулировать и доказать критерий биекции. Дать определение обратного отображения. Привести пример.

5. Дать определение композиции отображений. Привести примеры: композиция определена, композиция не определена. В каких случаях композиция двух отображений дает тождественное отображение

6. Перечислить группы аксиом, определяющие множество вещественных чисел. Используя аксиомы, доказать правило умножения неравенства на отрицательное число.

7. Дать определение точной нижней и точной верхней грани числового множества. Сформулировать и доказать теорему о существовании точных граней. Привести пример.

8. Дать определение индуктивного подмножества вещественных чисел. Определить множество натуральных чисел. Сформулировать и доказать принцип математической индукции. Привести пример его применения.

9. Сформулировать и доказать формулу Бинома Ньютона. Записать несколько строк треугольника Паскаля и объяснить, из какой формулы следует его построение.

10. Определить множество целых чисел как подмножество вещественных чисел. Сформулировать и доказать принцип Архимеда. Дать определение целой и дробной части числа. Привести примеры.

11. Определить множество рациональных чисел. Сформулировать и доказать свойство плотности рациональных чисел во множестве вещественных чисел. Привести пример применения этого свойства.

12. Сформулировать и доказать теорему о существовании арифметического корня из положительного вещественного числа. Объяснить, как определяется вещественная степень вещественного числа.

13. Дать определение конечного и счетного множества. Доказать, что множество рациональных чисел счетно. Привести другие примеры счетных множеств.

14. Дать определение счетного и континуального множества. Доказать, что отрезок [0;1] не является счетным множеством. Привести другие примеры континуальных множеств.

Второй вопрос билета.

1. Дать определение предела числовой последовательности. Сформулировать и доказать теоремы о единственности предела и ограниченности сходящейся последовательности. Привести примеры.

2. Дать определение бесконечно малой последовательности. Сформулировать и доказать теоремы о свойствах бесконечно малых последовательностей и о связи б.м. последовательностей и сходящихся последовательностей. Привести примеры.

3. Сформулировать и доказать теорему об арифметических действиях с последовательностями. Привести примеры применения этой теоремы.

4. Сформулировать и доказать теоремы о переходе к пределу в неравенстве для последовательностей и о трех последовательностях. Привести пример применения теоремы о трех последовательностях.

5. Дать определение бесконечно большой числовой последовательности. Рассмотреть разные случаи. Привести примеры. Сформулировать и доказать теорему о связи б.б. и б.м. последовательностей.

6. Дать определение монотонной последовательности. Сформулировать и доказать теорему Вейерштрасса о монотонных последовательностях. Привести пример применения этой теоремы.

7. Задать последовательность, предел которой обозначается через е. Доказать сходимость этой последовательности. Получить следствия из этого предела. Какая неопределенность здесь возникает?

8. Дать определение подпоследовательности. Сформулировать и доказать теорему о сходимости подпоследовательностей. Привести примеры применения этой теоремы.

9. Сформулировать и доказать лемму Кантора о вложенных отрезках и теорему Больцано – Вейерштрасса об ограниченных последовательностях.

10. Дать определение фундаментальной последовательности. Сформулировать и доказать критерий Коши сходимости числовых последовательностей. Привести примеры.

11. Дать определение предельной точки числового множества. Сформулировать и доказать критерий предельной точки. Привести примеры.

12. Дать определения предела функции по Коши и по Гейне. Сформулировать и доказать теорему об эквивалентности этих определений. Привести примеры.

13. Сформулировать и доказать теоремы о единственности предела функции, локальной ограниченности, локальном сохранении знака функцией, имеющей предел, а также теорему о трех функциях.

14. Сформулировать и доказать теорему о замене переменной под знаком предела. Привести примеры применения этой теоремы.

15. Сформулировать и доказать теорему об арифметических операциях с пределами функций. Привести примеры применения этой теоремы.

16. Дать определение бесконечно малой функции при x, стремящемся к x_0. Сформулировать и доказать теоремы о свойствах бесконечно малых функций. Привести примеры.

17. Дать определение бесконечно большой функции при x, стремящемся к x_0. Рассмотреть различные случаи. Сформулировать и доказать теорему о связи б.б. и б.м. функций. Привести примеры.

18. Перечислить известные Вам неопределенности, возникающие при нахождении пределов. Сформулировать и доказать теоремы о том, что $\infty \cdot \infty = \infty$, $0/\infty = 0$. Привести примеры.

19. Дать определение односторонних пределов при x, стремящемся к x_0 и при x, стремящемся к ∞. Сформулировать и доказать теоремы о равенстве односторонних пределов в обоих случаях.

20. Записать «первый замечательный предел» и доказать это равенство. Получить следствия из этого предела.

21. Записать «второй замечательный предел» и доказать это равенство. Получить следствия из этого предела.

23. Дать определение эквивалентных функций при x, стремящемся к x_0.. Сформулировать и доказать теоремы о свойствах эквивалентных функций и о применении эквивалентных функций для нахождения пределов. Привести примеры.

24. Дать определение бесконечно малой функции по сравнению с другой функцией при x, стремящемся к x_0. Сформулировать и доказать критерий эквивалентных функций. Дать определение главной части функции при x, стремящемся к x_0. Привести примеры.

25. Дать определение функции, ограниченной по сравнению с другой функцией при x, стремящемся к x_0. Сформулировать и доказать теорему о связи предела отношения функции с этим понятием.

26. Дать определение бесконечно малой функции по сравнению с другой функцией при x, стремящемся к $+\infty$. Привести примеры таких функций (с доказательствами).

27. Сформулировать и доказать различные варианты о пределе монотонной функции. Привести примеры.

28. Сформулировать и доказать различные варианты критерия Коши существования предела функции. Привести пример применения этой теоремы.

Третий вопрос билета.

1. Дать определение непрерывной функции в точке. Сформулировать и доказать критерий Гейне непрерывности функции в точке. Привести примеры непрерывных и разрывных функций.

2. Сформулировать и доказать теорему о сохранении непрерывности при арифметических действиях. Привести примеры применения этой теоремы.

3. Сформулировать и доказать теоремы о непрерывности композиции непрерывных функций и о переходе к пределу под знаком непрерывной функции. Привести примеры.

4. Сформулировать и доказать теорему о непрерывности монотонной сюръекции, заданной на отрезке. Доказать непрерывность степенной и показательной функции на их областях определения.

5. Сформулировать и доказать теорему Коши о промежуточных значениях непрерывной функции на отрезке. Как эта теорема используется при решении неравенств методом интервалов?

6. Сформулировать и доказать теорему Вейерштрасса о достижении точных граней непрерывной функцией на отрезке. Привести примеры функций, заданных на отрезке и на интервале.

7. Сформулировать и доказать теорему о существовании и непрерывности обратного отображения для строго монотонной функции. Непрерывность каких элементарных функций следует их этой теоремы? Доказать непрерывность логарифмической функции на ее области определения.

8. Дать определение непрерывной функции и равномерно непрерывной функции на множестве. Показать, чем отличаются эти понятия. Привести примеры.

9. Сформулировать и доказать теорему Гейне – Кантора о равномерной непрерывности непрерывной функции на отрезке.

10. Дать определение производной и дифференциала функции в точке. Привести пример. Сформулировать и доказать теоремы о связи производной и дифференциала и о непрерывности дифференцируемой функции.

11. Сформулировать и доказать теорему о производных при арифметических действиях. Какие производные из таблицы получаются с помощью этой теоремы? Получить их.

12. Сформулировать и доказать теорему о производной композиции функций. Привести пример применения этой теоремы для композиции трех функций.

13. Сформулировать и доказать теорему о производной обратной функции. Какие производные из таблицы получаются с помощью этой теоремы? Получить их.

14. Дать определения наклонной и вертикальной асимптоты к графику функции. Сформулировать и доказать теорему о нахождении наклонной асимптоты.

15. Дать определение k-й производной от функции в точке. Сформулировать правило Лейбница для нахождения k-й производной от произведения двух функций. Записать формулы для третьей, четвертой производной от произведения двух функций.

16. Дать определение точки локального экстремума и строгого локального экстремума функции. Сформулировать и доказать теорему Ферма и теорему Ролля.

17. Сформулировать и доказать теорему о формуле конечных приращений Коши. Получить из нее формулу конечных приращений Лагранжа. Привести пример применения этой формулы.

18. Сформулировать и доказать теорему о правиле Лопиталя для случая 0/0. Сформулировать теорему для случая ∞/∞. Привести примеры применения правила Лопиталя и случая, когда оно не применимо.

19. Записать многочлен Тейлора порядка n для функции в точке x_0. Доказать первое определяющее многочлен Тейлора свойство: совпадение производных до порядка n с производными функции в точке x_0.

20. Записать многочлен Тейлора порядка n для функции в точке x_0. Доказать второе определяющее свойство, то есть получить формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

21. Сформулировать и доказать теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Привести пример применения этой теоремы.

22. Получить разложения по формуле Маклорена пяти основных бесконечно дифференцируемых функций.

23. Сформулировать и доказать теорему о связи знаки производной с монотонностью функции, а также первое достаточное условие экстремума. Привести пример.

24. Сформулировать и доказать второе достаточное условие экстремума. Привести пример применения этой теоремы.

25. Дать определение выпуклой вверх [вниз] функции на интервале. Сформулировать и доказать теорему о связи направления выпуклости и второй производной функции. Привести пример.

26. Дать определение точки перегиба функции. Сформулировать и доказать теорему о направлении выпуклости и касательной к графику функции. Описать геометрический смысл точки перегиба.

27. Сформулировать и доказать теоремы о непрерывности и дифференцировании параметрически заданной функции. Получить формулу для второй производной в этом случае. Привести пример.

Семестр 2.

Первый вопрос билета.

1. Определение первообразной для функции на отрезке. Теорема о разности первообразных. Свойства первообразных. Таблица первообразных основных элементарных функций.

2. Теорема об интегрировании подстановкой. Замена переменной в неопределенном интеграле. Примеры.

3. Теорема об интегрировании по частям. Пример рекуррентной интегральной формулы. Пример циклического интеграла.

4. Интегрирование дробно-рациональных функций. Описать метод, привести пример.

5. Интегральные суммы Римана и Дарбу. Определение интеграла Римана. Необходимое условие интегрируемости. Свойства сумм Дарбу.

6. Теорема о существовании интеграла Римана от непрерывной функции на отрезке. Пример вычисления интеграла Римана от непрерывной функции без формулы Ньютона – Лейбница.

7. Интеграл с переменным верхним пределом и первообразная функции на отрезке. Формула Ньютона-Лейбница.

8. Числовой ряд, частичные суммы ряда, необходимое условие сходимости числового ряда. Свойства остатков числового ряда. Примеры сходящихся рядов.

9. Критерий Коши сходимости числового ряда. Примеры теорем, в доказательстве которых применяется критерий Коши.

10. Первый и второй признаки сравнения для рядов с неотрицательными членами. Примеры: когда эти признаки применимы, а когда – не применимы.

11. Признаки Даламбера и Коши сходимости рядов с неотрицательными членами. Примеры их применения.

12. Интегральный признак сходимости для рядов с неотрицательными членами. Сходимость обобщенного гармонического ряда.

13. Абсолютная и условная сходимость числового ряда. Теорема о перестановках членов абсолютно сходящегося ряда.

14. Абсолютная и условная сходимость числового ряда. Теорема о произведении абсолютно сходящихся рядов.

15. Признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов. Оценка остатка ряда, удовлетворяющего признаку Лейбница.

16. Признак Дирихле сходимости знакопеременного ряда. Разобрать пример.

17. Признак Абеля сходимости знакопеременного ряда. Примеры рядов, сходящихся по признаку Абеля.

18. Теорема Римана о перестановках членов условно сходящегося ряда. Привести пример сходящегося ряда, который после перестановки становится расходящимся.

19. Поточечная и равномерная сходимость функциональных последовательностей. Приведите примеры равномерно и неравномерно сходящихся функциональных последовательностей.

20. Теорема о равномерном пределе последовательности непрерывных функций. Теорема о почленном интегрировании функциональной последовательности.

21. Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании функциональной последовательности. Привести пример применения одной из теорем.

22. Поточечная и равномерная сходимость функционального ряда. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.

23. Признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда. Разобрать пример.

24. Признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда. Приведите пример ряда, который сходится равномерно на отрезке по признаку Абеля.

25. Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании функционального ряда. Привести примеры применения этих теорем.

Второй вопрос билета

1. Линейное отображение $A:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, его матрица. Доказать существование нормы оператора $A \, \|A\| = \sup\left\{\|A(x)\|, \|x\| \le 1, x \in \mathbb{R}^n\right\}$ и равномерную непрерывность отображения A.

2. Отображение, бесконечно малое по сравнению с другим отображением при $x \to x_0$. Дать определение, сформулировать критерий $o\left(\|x - x_0\|\right)$, $x \to x_0$.

3. Определение дифференциала отображения в точке. Теорема о непрерывности дифференцируемой функции. Примеры дифференцируемых и не дифференцируемых отображений.

4. Теоремы о покомпонентной непрерывности и покомпонентной дифференцируемости отображений $f: G \to \mathbb{R}^n, G \subset \mathbb{R}^m$. Привести примеры.

5. Определение частной производной отображения $f: G \to \mathbb{R}^n, G \subset \mathbb{R}^m$ в точке. Связь существования частной производных и дифференциала.

6. Теорема о дифференцировании композиции отображений. Идея инвариантности формы первого дифференциала. Привести примеры.

7. Теорема о дифференцировании обратного отображения. Матрица Якоби и якобиан обратного отображения. Привести пример.

8. Формулы конечных приращений для отображений. Показать различие между случаями $f: G \to \mathbb{R}, G \subset \mathbb{R}^m$ и $f: G \to \mathbb{R}^n, G \subset \mathbb{R}^m$.

9. Производная по направлению и градиент функции $f: G \to \mathbb{R}, G \subset \mathbb{R}^m$ в точке $x_0 \in G$. Свойства градиента. Касательная плоскость к графику функции $f: G \to \mathbb{R}, G \subset \mathbb{R}^m$ в точке $(x_0; f(x_0))$.

10. Частная производная второго и высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных. Привести пример. Дифференциал второго порядка для $f: G \to \mathbb{R}, G \subset \mathbb{R}^m$.

11. Формула Тейлора для вещественной функции нескольких переменных. Теоремы о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и в форме Пеано.

12. Точки локального экстремума отображения $f: G \to \mathbb{R}, G \subset \mathbb{R}^m$. Первое необходимое условие экстремума.

13. Квадратичные формы. Типы квадратичных форм. Второе необходимое условие экстремума функции $f: G \to \mathbb{R}, G \subset \mathbb{R}^m$.

14. Достаточные условия строгого локального экстремума отображения $f: G \to \mathbb{R}, G \subset \mathbb{R}^m$. Критерий Сильвестра. Привести пример.

15. Определение неявной функции $f: U(x_0, \delta) \to U(y_0, \varepsilon),\ x_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in \mathbb{R}$, заданной условием $F(x, y) = 0$ в окрестности точки $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$. Привести примеры.

16. Определение неявной функции $f: U(x_0, \delta) \to U(y_0, \varepsilon),\ x_0 \in \mathbb{R}^n, y_0 \in \mathbb{R}$, заданной условием $F(x, y) = 0$ в окрестности точки $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Привести примеры.

17. Теорема о существовании и единственности непрерывной неявной функции в окрестности точки $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$. Привести свой пример применения этой теоремы.

18. Теорема о дифференцируемости неявной функции в окрестности точки $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$. Привести свой пример нахождения дифференциала неявной функции.

19. Теорема о существовании, единственности, непрерывности и дифференцируемости неявной функции в окрестности точки $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^{m+1}$. Привести свой пример применения этой теоремы.

20. Теорема о существовании, единственности и дифференцируемости неявной функции в окрестности точки $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^{n+m}$. Привести свой пример применения этой теоремы.

21. Теорема о локальном существование и дифференцируемости обратного отображения. Привести свой пример применения этой теоремы.

Семестр 3.

Первый вопрос билета.

1. Мера Лебега бруса и открытого множества в $\mathbb{R}^n$. Доказать сигма-аддитивность отображения меры Лебега на семействе открытых множеств в $\mathbb{R}^n$.

2. Внешняя мера множества в $\mathbb{R}^n$. Доказать теорему о счетной полуаддитивности внешней меры.

3. Измеримые по Лебегу множества в $\mathbb{R}^n$. Доказать измеримость открытых и замкнутых множеств в $\mathbb{R}^n$.

4. Показать, что совокупность всех измеримых по Лебегу множеств в $\mathbb{R}^n$ образует сигма-алгебру.

5. Сформулировать и доказать критерий измеримого по Лебегу множества в $\mathbb{R}^n$, использующий замкнутые множества.

6. Сформулировать и доказать свойства меры Лебега: сигма-аддитивность, полнота, регулярность.

7. Сформулировать и доказать теорему о структуре измеримого по Лебегу множества в $\mathbb{R}^n$.

8. Сформулировать теорему об инвариантности меры Лебега относительно изометрии. Привести примеры изометрий и показать, как применяется эта теорема.

9. Дать определение сигма-алгебры множеств. Сформулировать и доказать теорему о пересечении семейства сигма-алгебр. Рассмотреть пример: борелевская сигма-алгебра.

10. Сформулировать определение и доказать свойства произвольной неотрицательной меры, в том числе теорему о непрерывности меры.

11. Дать определение измеримой функции, доказать теорему об условиях, эквивалентных измеримости, и следствие из неё. Привести пример неизмеримой функции.

12. Доказать измеримость sup, inf, предела последовательности измеримых функций.

13. Сформулировать и доказать теорему о измеримости композиции функций. Сформулировать и доказать следствия: измеримость при арифметических действиях.

14. Дать определение простой функции, интеграла Лебега от простой функции. Сформулировать и доказать свойства этого интеграла, в том числе теорему о счетной аддитивности интеграла от простой функции.

15. Доказать теоремы об интеграле от суммы неотрицательных простых функций и о монотонности интеграла от неотрицательных простых функций.

16. Дать определение интеграла Лебега от неотрицательной измеримой функции. Сформулировать и доказать его свойства.

17. Сформулировать и доказать теорему Б. Леви о монотонной сходимости. Привести примеры применения этой теоремы.

18. Сформулировать и доказать теоремы об интегрируемости суммы и ряда измеримых неотрицательных функций.

19. Сформулировать и доказать теоремы о счетной аддитивности интеграла и о нулевом интеграле от неотрицательной функции. Привести примеры применения этих теорем.

20. Дать определение интеграла Лебега от измеримой функции. Определить суммируемые функции. Сформулировать и доказать теоремы о связи интеграла от функции и интеграла от её модуля.

21. Сформулировать и доказать теоремы о монотонности интеграла Лебега, интегрировании по подмножеству, о мажоранте.

22. Сформулировать и доказать теоремы о счетной аддитивности и абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

23. Сформулировать и доказать теорему о линейности интеграла Лебега.

24. Сформулировать и доказать теорему Лебега о мажорируемой сходимости. Привести пример ее применения.

25. Дать определение эквивалентных (равных почти всюду) функций. Сформулировать и доказать свойства таких функций. Какие теоремы об интеграле Лебега можно сформулировать с понятием «почти всюду»?

26. Сформулировать и доказать критерий Лебега интегрируемости функции по Риману на отрезке прямой.

27. Сформулировать и доказать теорему о связи интегралов Римана и Лебега на отрезке.

28. Сформулировать и доказать свойства интеграла с переменным верхним пределом и формулу Ньютона-Лейбница.

29. Сформулировать и доказать теоремы о замене переменной в определенном интеграле и об интегрировании по частям.

30. Сформулировать и доказать первую теорему о среднем для интеграла на отрезке и следствия из нее.

31. Сформулировать теорему о формулах Боннэ. Доказать её в одном случае. Привести геометрический смысл этих формул.

32. Доказать теорему об интегральной форме остаточного члена в формуле Тейлора.

33. Дать определение несобственного интеграла первого и второго рода. Привести примеры сходящихся и расходящихся интегралов.

34. Абсолютная сходимость несобственного интеграла. Доказать теорему о связи с интегралом Лебега и мажорантный признак абсолютной сходимости.

35. Сформулировать и доказать признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственного интеграла. Привести примеры их применения.

Второй вопрос билета

1. Сформулировать теорему о неявном отображении. Привести примеры.

2. Сформулировать и доказать теорему о локальной обратимости отображения. Сформулировать и доказать принцип сохранения области.

3. Дать два определения диффеоморфизма: 1) без использования якобиана, 2) с использование якобиана. Привести примеры диффеоморфизмов и не диффеоморфизмов нескольких переменных.

4. Дать определение зависимых и независимых систем функций. Привести примеры. Сформулировать и доказать теорему о необходимом условии зависимости и следствия.

5. Дать определение зависимых и независимых систем функций. Сформулировать теорему о достаточных условиях локальной независимости и зависимости. Привести схему доказательства.

6. Дать определение условного экстремума. Описать прямой метод нахождения условного экстремума. Привести примеры: 1) прямой метод работает, 2) прямой метод не работает.

7. Описать метод Лагранжа нахождения условного экстремума. Сформулировать и доказать теорему необходимых условиях условного экстремума. Сформулировать теорему о достаточных условиях условного экстремума.

8. Дать определение сечения множества в $\mathbb{R}^n$. Сформулировать теорему о сечениях измеримого множества. Описать этапы доказательства. Разобрать этап, где появляется «почти всюду». Доказать последний этап.

9. Сформулировать и доказать теоремы о измеримости и мере декартового произведения и о подграфике измеримой функции. Привести пример нахождения меры подграфика.

10. Сформулировать и доказать теорему Фубини для функции $f:\mathbb{R}^{p+q}\to[0;+\infty]$. Привести вторую, симметричную, формулировку. Привести пример.

11. Сформулировать и доказать теорему Фубини для функции $f:\mathbb{R}^{p+q}\to[-\infty;+\infty]$. Привести вторую, симметричную, формулировку. Привести пример.

12. Сформулировать и доказать теорему Фубини для функции $f:A\to[-\infty;+\infty]$. Привести вторую, симметричную, формулировку. Привести пример.

13. Дать определение диффеоморфизма. Сформулировать и доказать теорему о локальном разложении диффеоморфизма. Сформулировать другие результаты о диффеоморфизмах: измеримость $\hat{\Psi}\chi_P$, мера прообраза нульмерного множества при диффеоморфизме.

14. Сформулировать теорему о замене переменной в интеграле Лебега. Доказать её для характеристической функции бруса и отдельных видов диффеоморфизмов.

15. Сформулировать теорему о замене переменной в интеграле Лебега. Сформулировать и доказать теорему о редукции к неотрицательной функции и ограниченному множеству.

16. Сформулировать теорему о замене переменной в интеграле Лебега. Сформулировать и доказать теорему о редукции при разложении диффеоморфизма на композицию диффеоморфизмов.

17. Дать определение ступенчатой функции. Сформулировать леммы о приближении простой и измеримой функции ступенчатыми функциями. Пояснить роль этих лемм в доказательстве теоремы о замене.

18. Сформулировать теорему о замене переменной в интеграле Лебега. Сформулировать и доказать теорему о редукции к характеристической функции бруса.

19. Сформулировать теорему о замене переменной в интеграле Лебега. Доказать эту теорему для характеристической функции бруса индукцией по размерности пространства.

20. Сформулировать теорему о замене переменной в интеграле Лебега. Сформулировать и доказать обобщения этой теоремы.

21. Сформулировать и доказать следствия теоремы о замене: мера образа множества при диффеоморфизме, геометрический смысл якобиана.

22. Сформулировать теорему о замене переменной в интеграле Лебега. Рассмотреть примеры с использованием полярной и сферической систем координат.

23. Сформулировать теорему о замене переменной в интеграле Лебега. Рассмотреть пример с использованием нестандартной замены переменных для двух переменных.

Семестр 4.

Первый вопрос билета

1. Многообразие без края. Определение и примеры: открытые множества, графики непрерывных отображений, кривые и поверхности 2-го порядка, тор, винтовая линия в пространстве $\mathbb{R}^3$ и др.
2. Карты и атласы многообразия без края. Определение и простые примеры.
3. Карта, порождающая полярные координаты на плоскости. Карты, порождающие цилиндрические и сферические координаты в пространстве $\mathbb{R}^3$.
4. Примеры карт на сфере пространства $\mathbb{R}^3$.
5. Многообразие с краем. Край многообразия. Карты и атласы многообразия с краем. Определения и примеры.
6. Гладкие карты, атласы и многообразия. Определения и примеры.
7. Функция перехода. Определение и примеры. Теорема о функции перехода.
8. Касательное пространство к гладкому многообразию. Касательное пространство к графику непрерывно дифференцируемого отображения $f:G\to\mathbb{R}^m$, где $G\subset\mathbb{R}^n$.

9. Теорема о поверхности уровня отображения $f\colon G\to\mathbb{R}^m, G\subset\mathbb{R}^n, 1\leqslant m<n.$ Касательное пространство к поверхности уровня. Примеры.
10. Прямое определение длины гладкой кривой. Примеры.
11. Определение меры Лебега на гладком многообразии произвольной размерности.
12. Длина дуги гладкой кривой в пространстве $\mathbb{R}^n$. Длина графика отображения сегмента в пространство $\mathbb{R}^n$.
13. Площадь 2-мерного многообразия в n-мерном пространстве.
14. Площадь графика функции 2-х переменных.
15. Площадь сектора $\alpha<\varphi<\beta, 0<\rho<f\ \varphi$ в полярных координатах.
16. Площадь поверхности вращения гладкой кривой.
17. Общее определение интеграла Лебега по неотрицательной мере. Интеграл 1-го рода по многообразию. Теорема о вычислении интеграла 1-го рода.
18. Криволинейные интегралы 1-го рода. Формулы для их вычисления. Физические задачи, приводящие к криволинейным интегралам 1-го рода.
19. Поверхностные интегралы 1-го рода. Формулы их вычисления. Физические задачи, приводящие к поверхностным интегралам 1-го рода.

Второй вопрос билета

1. Базисы одной ориентации в пространствах размерности 2 и 3.
2. Базисы одной ориентации в пространстве $\mathbb{R}^n$. Ориентированное евклидово пространство.
3. Согласованные карты многообразия. Ориентирующий атлас. Ориентируемое многообразие. Ориентированное многообразие.
4. Критерий согласованности гладких карт (через якобиан функции перехода).
5. Задание ориентации гладкой кривой в n-мерном пространстве.
6. Ориентация замкнутого контура на плоскости.
7. Согласованность декартовых, цилиндрических и сферических координат.
8. Ориентация графика непрерывно дифференцируемого отображения.
9. Теорема о поле нормалей, определяемом гладкой картой.
10. Теорема о задании ориентации непрерывным полем нормалей.
11. Примеры ее применения: Задание ориентации на окружности. Задание полем нормалей ориентации графика функций 1-го и 2-х переменных.
12. Естественная ориентация поверхности уровня вещественной функции.
13. Теоремы о крае гладкого многообразия. Определение ориентации края, согласованной с ориентацией всего многообразия. Примеры на чертежах.
14. Внешнее произведение линейных функционалов. Определение и свойства.
15. Кососимметрические полилинейные формы. Определение и свойства.
16. Внешнее произведение дифференциалов независимых переменных. Его геометрический смысл (хотя бы для $dx\wedge dy,\ dy\wedge dz,\ dz\wedge dx$ в $\mathbb{R}^3$).
17. Пространство $\wedge^p(\mathbb{R}^n)$. Общий вид $\Phi\in\wedge^p(\mathbb{R}^n)$ при $p=1,2,\ldots,n-1,n.$
18. Дифференциальная форма степени $p\geqslant 0$ на открытом множестве $G\subset\mathbb{R}^n$. Общий вид дифференциальной формы степени $p\geqslant 0$ от n переменных.
19. Общий вид дифференциальной формы степени 0,1,2,3, …, $n-1, n$ от n переменных. Частные случаи при $n=1,2,3$.
20. Векторное поле. Дифференциальная форма работы векторного поля.
21. Потенциальные векторные поля.

22. Дифференциальная форма потока векторного поля.
23. Внешнее дифференцирование дифференциальной формы.
24. Градиент скалярного поля. Его связь с операцией внешнего дифференцирования.
25. Ротор векторного поля. Его связь с операцией внешнего дифференцирования .
26. Дивергенция векторного поля. Ее связь с операцией внешнего дифференцирования.
27. Операция замены переменных в дифференциальной форме.
28. Определение потока векторного поля через 2-мерную ориентированную поверхность. Свед́ение вычисления потока поля к вычислению интеграла Лебега.
29. Определение интеграла 2-го рода от дифференциальной формы по ориентированному многообразию.
30. Кусочно-гладкие кривые и поверхности. Определения и примеры.
31. Ориентация на кусочно гладком многообразии. Определение и примеры.
32. Интеграл 2-го рода по ориентированной кусочно гладкой поверхности. Определение и свойства.
33. Физический смысл криволинейного интеграла 2-го рода.
34. Формула Ньютона – Лейбница для криволинейного интеграла 2-го рода и ее следствия для потенциального поля.
35. Формула Грина. Следствие о площади.
36. Формула Гаусса – Остроградского и классическая формула Стокса.
37. Общая формула Стокса.

Третий вопрос билета

1. Степенной ряд. Радиус и интервал его сходимости. Формулы Даламбера, Коши, формула Коши – Адамара для радиуса сходимости (с доказательством). Привести пример применения формулы Коши – Адамара.

2. Свойства суммы степенного ряда: непрерывность, дифференцируемость, почленное интегрирование (с доказательством). Привести примеры применения этих теорем.

3. Равномерная сходимость степенного ряда. Теорема Абеля (с доказательством). Привести примеры применения этой теоремы.

4. Ряд Тейлора. Критерий сходимости ряда Тейлора к значениям функции (с доказательством). Применение этого критерия к стандартным разложениям в ряд Маклорена. Сходимость биномиального ряда (рассмотреть отдельные случаи).

5. Определение тригонометрического ряда Фурье и обоснование коэффициентов Эйлера – Фурье при равномерной сходимости ряда (с доказательством). Свойства ряда Фурье на $(-\pi;\pi)$ для четной, нечетной функции.

6. Интегральные представления частичных сумм тригонометрического ряда Фурье (с доказательством). Какие интегралы равны 1 вследствие этих формул?

7. Лемма Римана – Лебега (с доказательством), следствие для коэффициентов Эйлера – Фурье. Привести примеры интегралов с параметром, сходящихся к нулю по лемме Римана – Лебега.

8. Принцип локализации и признак Дини сходимости триг. ряда Фурье (с доказательством). Привести пример применения признака Дини.

9. Признак Липшица сходимости триг. ряда Фурье (с доказательством) и его следствие для дифференцируемых функций (с доказательством). Привести пример применения признака Липшица.

10. Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании триг. ряда Фурье (с доказательством). Привести пример применения одной из теорем.

11. Минимальное свойство частичных сумм триг. ряда Фурье, неравенство Бесселя (с доказательством). Равенство Парсеваля. Записать равенство Парсеваля для какого-нибудь триг. ряда Фурье.

12. Собственный интеграл (Римана), зависящий от параметра, его непрерывность, дифференцирование по параметру, интегрирование по параметру (все – с доказательством). Привести пример.

13. Несобственный интеграл, зависящий от параметра. Равномерная сходимость по параметру. Признаки равномерной сходимости: Вейерштрасса, Дирихле, Абеля (с доказательством). Привести пример применения признака Абеля.

14. Несобственный интеграл, зависящий от параметра, его непрерывность, дифференцирование по параметру, интегрирование по параметру (все – с доказательством). Привести пример.

15. Бета- и гамма- функции. Теорема об их области определения (с доказательством). Непрерывность этих функций на их области определения (с доказательством).

16. Основные свойства бета- и гамма- функции (с доказательством). Значения этих функций в некоторых точках. Формула Стирлинга.

17. Суммирование рядов методом средних арифметических. Теорема о совпадении сумм, если ряд сходится (с доказательством). Примеры суммирования рядов методом средних арифметических.

18. Суммы Фейера, их интегральное представление. Теоремы о сходимости и равномерной сходимости сумм Фейера к функции (с доказательством).

19. Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами (с доказательством). Что можно сказать о замыкании множества многочленов в метрическом пространстве $C\,[a;\, b]$?

Примеры задач на экзамене

Первый семестр

1. Исследовать сходимость последовательности $\{x_n\}$: $x_n = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \ldots + \frac{\sqrt{n}}{n+1}$.

2. Доказать по определению: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^3 - 1} = +\infty$

3. Найти предел: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{3n-2}\right)^n$ 4. Найти предел: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2 - 4}}$

5. Найти точки разрыва, определить их род: $f(x) = (\lg x)^{-1}$

Второй семестр

1. Вычислить неопределённый интеграл: $\int \frac{arctg\sqrt{x}\, dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

2. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4}$ в точке $M(0,\, 2,\, 1)$.

3. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + y^2 - xy - x$.

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+5}{4n+1}\right)^n$.

5. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + x^4}}$, $x \in \mathbb{R}$.

Третий семестр

1. Вычислить интеграл по мере Лебега $\int\limits_{\mathbb{R}} f\, d\lambda$, если $f=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b^{-n}\cdot\chi_{[n;n+a^{-n}]}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

2. Исследовать интеграл на сходимость: $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\left(\frac{1}{\sin x}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

3. Исследовать интеграл на абсолютную и условную сходимость $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{(x-1)\cos 3x}{x^2-4x+5}dx$.

4. Найти объем, ограниченный поверхностями: $z = x + y$, $z = xy$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

5. Найти $\iint\limits_{D}(2+x-y)\,dxdy$, где $D:\ x^2+y^2\ge 1,\ \ x^2+y^2\le 9,\ \ y\ge x,\ \ y\le\sqrt{3}x$.

Четвертый семестр

1. Найти $\int\limits_{\Gamma} xdy$, Г – верхняя полуокружность $x^2+y^2=a^2$ от т.$A(-a,0)$ до т. $B(a,0)$.

2. Вычислить $\iint\limits_{S} z^2 dS$, если $S=\left\{x^2+y^2+z^2\le a^2, x=y\right\}$.

3. Доказать, что $\int\limits_{C}\frac{dx+dy+dz}{x+y+z}=0$ по любому замкнутому контуру C, не пересекающему плоскость $x + y + z = 0$.

4. Найти поток поля $\bar{F}=(x^2z^2-x^2y^2)\bar{i}+(3xy^2z^2-2xyz^2)\bar{j}+(2xy^2z-2xyz^3)\bar{k}$ через внешнюю сторону поверхности $S=(x-2)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=4$.

5. Разложить на интервале $(-\pi, \pi)$ в ряд Фурье функцию $f(x) = \cos(x/2)$. Построить график суммы полученного ряда.

6. Вычислить, используя эйлеровы интегралы: $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{xdx}{(1+x^3)^2}$.

11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «Moodle» - https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=33651 (1 семестр)
https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=5442 (2 семестр)
https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=25404 (3 семестр)
https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=8920 (4 семестр)

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине. Оценочные материалы расположены в электронных курсах.

в) Примерный план практических занятий по дисциплине
Первый семестр
1. Бином Ньютона. Метод математической индукции
2. Множества. Операции над множествами
3. Отображение, функция. Образ, прообраз.
4. Построение графиков функций элементарными средствами. Основные элементарные функции. Инькции, сюръекции, биекции
5. Параметрические кривые – функции и не функции
6. Композиция функций, обратная функция
7. Числовые множества. Точные грани.
8. Метод математической индукции (повторение, усложнение)
9. Мощность множества
10. К.Р. №1 по теме «Введение в математический анализ»
11. Предел последовательности – определение
12. Нахождение пределов с помощью арифм.

13. Т. о трех последовательностях. Бесконечно большие посл-ти
14. Т. Вейерштрасса. Монотонные посл-ти
15. Критерии сходимости посл-тей: крит. Коши, подпосл-ти
16. Два определения предела функции
17. Нахождение пределов функций с помощью арифм. операций
18. Бесконечно большие функции. Односторонние пределы. Пределы на ∞
19. Первый замечательный предел и следствия из него. Эквивалентные функции
20. Второй замечательный предел и следствия из него. Эквивалентные функции
21. Сравнение бесконечно больших, бесконечно малых
22. К.р. №2 по теме «Предел функции»
23. Непрерывные функции. Док-во по определению, критерий Гейне
24. Непр. элем. функций. Точки разрыва, их род. Эскизы графиков
25. Равномерная непрерывность. Т. Гейне – Кантора о равномерной непрерывности на отрезке
26. Нахождение производной и дифференциала по определению
27. Нахождение производных по таблице и правилам дифференцирования
28. Правило Лопиталя
29. Формула Тейлора
30. Исследование функций и построение графиков

31, 32. Итоговые занятия, проверка индивидуального задания

Второй семестр

1. Нахождение первообразных по таблице
2. Интегрирование по частям и подстановкой
3. Интегрирование по частям и подстановкой
4. Рациональные функции.
5. Рациональны функции. Инд. работа
6. Специальны методы интегрирования
7. Специальные методы интегрирования
8. Формула Ньютона-Лейбница.
9. К.Р. №1 «Нахождение первообразных»
10. Числовые ряды. Нахождение суммы ряда. Признаки сравнения для рядов с неотриц. членами.
11. Признаки Даламбера, Коши, Раабе. Интегральный признак.
12. Абсолютная и условная сходимость. Признак Лейбница
13. Признаки Дирихле и Абеля. Критерий Коши сходимости ряда.
14. Функциональные последовательности и ряды. Поточечная и равномерная сходимость.
15. Функциональные ряды. Признаки равномерной сходимости.
16. К.р.№2 «Числовые и функциональные ряды»
17. Примеры метрич. пространств. Евклидова метрика. Открытые и замкнутые множества. Внутренние, граничные, предельные точки.
18. Компактность метр. пространства. Полнота метр. пространства

20. Непрерывные отображения на компактах. Равномерная непрерывность

21. Предел отображения $R^n \to R^m$, непрерывность.

Коллоквиум по теме «Метрические пространства» - как контроль

22. Дифференциал и производная матрица отображения $R^n \to R^m$.
23. Частные производные, их связь с дифференциалом и производной матрицей.
24. Дифференцирование композиции. Цепное правило.
25. Отображения $R^n \to R$. Отображения $R \to R^m$. Геом. смысл производной матрицы
26. Производные высших порядков, в том числе для сложной функции
27. К.Р.№3 Дифференцирование многомерных отображений

28. Формула Тейлора
29. Экстремум функции $R^n \to R$.
30. Экстремум функции $R^n \to R$. Условный экстремум
31, 32. Неявное отображение. Проверка индивидуального задания

Третий семестр

1. Меры на семействах множеств. Множества, меры которых сложно определить: Канторово множество, ковер Серпинского, неограниченные множества конечной меры.
2. Мера брусов. 3. Мера открытых множеств 4. Внешняя мера
5. Измеримые множества 6. Мера Лебега 7. Задачи на теорию меры Лебега и абстрактную теорию меры
8–9. Измеримые функции
10. Простые функции
11. Интегрирование простых функций
12. Интегрирование неотрицательных функций
13. Интегрирование неотрицательных функций. Теорема Б. Леви
14. Интегрирование различных функций
15. Предельный переход в интеграле Лебега
16. К.Р.№1 «Мера и интеграл Лебега»
17. Вычисление интеграла Лебега с помощью интеграла Римана.
18. Нахождение площадей с помощью интеграла
19. Замена переменной в определенном интеграле
20. Интегрирование по частям в определенном интеграле. Использование теорем о среднем для оценки интегралов
21. Абсолютная сходимость несобственных интегралов. Связь с интегралом Лебега по неограниченному множеству
22. Условная сходимость несобственных интегралов.
23. К.Р.№2 «Определенный и несобственный интеграл»
24. Неявные и обратные отображения. Якобианы. Зависимость функций
25. Условный экстремум. Прямой метод и метод Лагранжа для его нахождения
26. Метод Лагранжа нахождения условного экстремума. Инд. работа
27. Построение сечений множеств и нахождение их меры
28 – 29. Нахождение двойных интегралов по т. Фубини
30 – 31. Нахождение тройных интегралов по т. Фубини
32. К.Р.№3 «Теорема Фубини»

Четвертый семестр

1–3. Замена переменных в двойном и тройном интеграле
4. Гомеоморфизмы множеств в $\mathbb{R}^n$
5 – 6. Многообразия в $\mathbb{R}^n$, многообразия с краем. Карты, атласы, касательное пространство
7 – 8. Мера на многообразии в $\mathbb{R}^n$
9 –10. Интеграл (1-го рода) Лебега по многообразию
11–12. Ориентация многообразий в $\mathbb{R}^n$
13. К.Р.№1 «Многообразия, интеграл Лебега гна многооообразии»
14.Дифференциальные формы. Формы работы и потока.
15 – 16. Замена переменных в дифференциальной форме
17 – 18. Интегрирование дифференциальных форм
19 – 20. Формула Стокса в различных случаях
21. К.Р.№2 «Интегрирование дифф. форм по многообразию. Формула Стокса»
22. Степенные ряды
23 – 24. Степенные ряды, ряды Тейлора

25 – 26. Ряды Фурье
27 – 28. Интеграл, зависящий от параметра
29 – 30. Бета- и Гамма-функции
31, 32. Итоговые занятия, проверка индивидуального задания

д) Методические указания по организации самостоятельной работы студентов.

Самостоятельная работа студента организуется и поддерживается преподавателем практики (при выполнении домашних работ, индивидуальных заданий), а также лектором (подготовка к коллоквиумам, экзамену). Все материалы, обеспечивающие самостоятельную работу, выдаются на практических занятиях либо через электроные курсы. Также используются методические пособия, подготовленные преподавателями ММФ ТГУ (см.п.12.б), проводятся дополнительные консультации. Для успешного изучения дисциплины «Математический анализ» необходимо посещать лекции, практические занятия и выполнять задания, выданные преподавателями, в указанные сроки, при необходимости посещать консультации для уточнения различных вопросов по дисциплине.

12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

– Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – СПб.: Лань, 2020
– Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа в 3 т. – М.: Юрайт, 2020
– Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу Т.1, 2, 3. – М.: Физматлит, 2016
– Зорич В. А. Математический анализ Ч. 1, 2. – М.: МЦНМО, 2019
– Ильин В. А., Садовничий, Сендов Бл. Х. Математический анализ Ч. 1, 2: учебник для бакалавров. – М.: Юрайт, 2017.
– Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И. Курс математического анализа. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний , 2017
– Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления Т. 1,2,3. – СПб.: Лань, 2016.

б) дополнительная литература:

– Мера Лебега-1. Теория и задачи /сост. Г. В. Сибиряков, Е. Г. Лазарева, Ю. А. Мартынов. – Томск: Издательский Дом Томского государственного университета, 2016
– Мера Лебега-2. Теория и задачи /сост. Г. В. Сибиряков, Е. Г. Лазарева, Ю. А. Мартынов. – Томск: Издательский Дом Томского государственного университета, 2016
– Интеграл Лебега по неотрицательной мере. Теория и задачи./ сост. Г. В. Сибиряков, Т. В. Емельянова, Е. Г. Лазарева Томск: Издательский Дом Томского государственного университета, 2017.
– Лазарева Е. Г. Теорема о замене переменной в интеграле Лебега : избранные лекции/ Е. Г. Лазарева, Т. В. Емельянова; - Томск : Издательский Дом Томского государственного университета, 2019.
– Сибиряков Г. В., Мартынов Ю. А. Метрические пространства. – Томск: ТГУ, 2012
– Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 2000

– Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А. Задачи и упражнения по математическому анализу Кн. 1, 2 . – М.: Высшая школа, 2000
– Дьяченко М. И., Ульянов П. Л. Мера и интеграл. – М.: Факториал-пресс, 2002
– Клементьев. З. И. Лекции по математическому анализу. Вып. 1-5. – Томск: ТГУ, 1975-1987
– Копанев С. А., Копанева Л. С., Кривякова Э. Н. Язык математического анализа: справочник. – Томск: ТГУ, 2008
– Куваев М. Р. Дифференциальное и интегральное исчисление Ч. 1,2,3. – Томск: ТГУ, 1977
– Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа Т.1, Т. 2, кн. 1,2, Т.3. – Москва: Юрайт, 2016
– Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления Т. 1,2. – М.: Наука. Физматлит, 1970
– Место математического анализа как науки в подготовке специалистов на ММФ ТГУ. – Томск: ТГУ, 2008
– Очан Ю. С. Сборник задач по математическому анализу: Общая теория множеств и функций. – М.: Просвещение, 1981
– Рудин У. Основы математического анализа. – СПб.: Лань, 2004
– Садовничий В.А. Теория операторов. – М.: Высшая школа, 1999
– Ульянов П. Л., Бахвалов А. Н., Дьяченко М. И. [и др.] Действительный анализ в задачах. – М.: Физматлит, 2005
– Шилов Г. Е. Математический анализ: Функции одного переменного. – М.: Издательство МГУ, 2002

в) ресурсы сети Интернет:

– Single Variable Calculus. URL: https://ocw.mit.edu/courses/18-01sc-single-variable-calculus-fall-2010/

– Multivariable Calculus. URL: https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/

– Математический анализ. Часть 1. URL: https://teach-in.ru/course/mathan-fomenko

– Математический анализ. Часть 2. URL: https://teach-in.ru/course/mathan-fomenko-p2

– Математический анализ. Часть 1. URL: https://teach-in.ru/course/calculus-shaposhnikov-part1

– Математический анализ. Часть 2. URL: https://teach-in.ru/course/calculus-shaposhnikov-part2

– Математический анализ. Часть 3. URL: https://teach-in.ru/course/calculus-shaposhnikov-part3

– Математический анализ. Часть 4. URL: https://teach-in.ru/course/calculus-shaposhnikov-part4

– Действительный анализ. URL: https://teach-in.ru/course/deistvan-Dyachenko

13. Перечень информационных технологий

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

– Microsoft Office Standart 2013 Russian: пакет программ. Включает приложения: MS Office Word, MS Office Excel, MS Office PowerPoint,

– публично доступные облачные технологии (Google Docs, Яндекс диск и т.п.).

б) информационные справочные системы:

– Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ – http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system

– Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ – http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index

– ЭБС Лань – http://e.lanbook.com/

– ЭБС Консультант студента – http://www.studentlibrary.ru/

– Образовательная платформа Юрайт – https://urait.ru/

– ЭБС ZNANIUM.com – https://znanium.com/

– ЭБС IPRbooks – http://www.iprbookshop.ru/

14. Материально-техническое обеспечение

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

Аудитории для проведения занятий лекционного и семинарского типа индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации в смешенном формате («Актру»).

15. Информация о разработчиках

Галанова Наталия Юрьевна, к.ф.-м.н, доцент, доцент каф. Общей математики ММФ ТГУ;

Емельянова Татьяна Вениаминовна, к.ф.-м.н, доцент, доцент каф. Математического анализа и теории функций ММФ ТГУ;

Лазарева Елена Геннадьевна, к.ф.-м.н, доцент, доцент каф. Общей математики ММФ ТГУ.