Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Физический факультет

УТВЕРЖДАЮ:
Декан физического факультета
_______________ С.Н. Филимонов
«15» апреля 2021 г.

Рабочая программа дисциплины

Теория групп

по направлению подготовки

03.03.02 Физика

Направленность (профиль) подготовки:
«Фундаментальная физика»

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2021

Код дисциплины в учебном плане: Б1.В.ДВ.01.01.05

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
_______________ О.Н. Чайковская

Председатель УМК
_______________ О.М. Сюсина

Томск – 2021

1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины (модуля)

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

– ОПК-2 – Способен проводить научные исследования физических объектов, систем и процессов, обрабатывать и представлять экспериментальные данные;

– ПК-1 – Способен проводить научные исследования в выбранной области с использованием современных экспериментальных и теоретических методов, а также информационных технологий.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 2.2 – Анализирует и интерпретирует экспериментальные и теоретические данные, полученные в ходе научного исследования, обобщает полученные результаты, формулирует научно обоснованные;

ИПК 1.1 – Собирает и анализирует научно-техническую информацию по теме исследования, обобщает научные данные в соответствии с задачами исследования.

2. Задачи освоения дисциплины

– Освоить основные понятия и методы теории групп.

– Научиться применять понятийный аппарат и методы теории групп для решения практических задач профессиональной деятельности.

3. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, входит в модуль по выбору «Теоретическая и математическая физика».

4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине

Семестр 6, экзамен.

5. Входные требования для освоения дисциплины

Для успешного освоения дисциплины требуются компетенции, сформированные в ходе освоения образовательных программ предшествующего уровня образования.

Для успешного освоения дисциплины требуются результаты обучения по следующим дисциплинам: Математический анализ, Линейная алгебра и аналитическая геометрия, Дифференциальная геометрия, Теория функций комплексного переменного, Методы математической физики.

6. Язык реализации

Русский

7. Объем дисциплины (модуля)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 з.е., 108 часов, из которых:

– лекции: 32 ч.;

–практические занятия: 32 ч.;

– в том числе практическая подготовка: 32 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

8. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам

Тема 1. Роль симметрии в физике. Определение и примеры групп.

Тема 2. Подгруппы и смежные классы, нормальный делитель и фактор-группа.

Тема 3. Коммутаторы. Разрешимые и простые группы.
Тема 4. Гомоморфизмы изоморофизмы и автоморфизмы групп.
Тема 5. Прямое и полупрямое произведение групп.
Тема 6. Определение и примеры групп Ли.
Тема 7. Топология групп Ли.
Тема 8. Классические группы Ли.
Тема 9. Топология классических групп Ли.
Тема 10. Группы преобразований и однородные пространства.
Тема 11. Примеры однородных пространств. Каноническая реализация однородного пространства.
Тема 12. Определение и примеры линейного представления группы.
Тема 13. Эквивалентные представления. Леммы Шура.
Тема 14. Прямая сумма представлений. Полная приводимость.
Тема 15. Тензорное произведение линейных пространств и представлений.
Тема 16. Сопряженное пространство и контрагредиентное представление.
Тема 17. Инвариантное среднее на компактной группе.
Тема 18. Основные свойства представлений компактных групп. Соотношения ортогональности.
Тема 19. О полноте матричных элементов полной системы неприводимых представлений.
Тема 20. Неприводимые представления группы вращений.
Тема 21. Спинорный гомоморфизм.
Тема 22. Классификация неприводимых представлений группы SU(2) и SO(3).

9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине проводится с применением балльно-рейтинговой системы, включающей контроль посещаемости, результаты выполнения контрольных работ, заданий и тестов по материалам курса, и фиксируется в форме баллов (нарастающим итогом): посещаемость – максимальный балл 10, выполнение контрольных заданий – 30, тестов – 10. Контрольная точка проводится не менее одного раза в семестр.

10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Экзамен в шестом семестре проводится в письменной форме по билетам. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

На промежуточную аттестацию планируется не более 40% рейтинга.

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Экзаменационная оценка определяется исходя из результатов экзамена и текущей аттестации в течение семестра и согласуется с принятым соответствием с 5-ти балльной шкалой оценивания: 99-86 — «отлично»; 85-66 — «хорошо»; 65-45 — «удовлетворительно», менее 45— «неудовлетворительно».

Экзаменационный билет состоит из двух вопросов.

Первый вопрос проверяет сформированность компетенции ПК-1 в соответствии с индикатором достижения ИПК-1.1. Ответ дается в развернутой форме, включая вычисления.

Второй вопрос из списка контрольных вопросов по курсу (приведен в разделе 11), проверяет сформированность компетенции ОПК-2 в соответствии с индикатором достижения компетенции ИОПК-2.2. Ответ на вопрос второй части дается в краткой форме, включающей краткую интерпретацию полученных результатов.

11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «Moodle» - https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=24826

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

в) Примерная тематика проверочных вопросов к лекциям

1.Сформулировать определение группы. Доказать единственность единицы и обратного элемента. Что такое коммутативная и некоммутативная группа? Что такое конечная и бесконечная группа. Что такое таблица Кэли конечной группы? Что такое циклическая группа конечного и бесконечного порядка?

2.Сформулировать определение группы эндоморфизмов и автоморфизмов линейного пространства, общей и специальной линейной группы. Что такое матрица линейного оператора. Почему группы и изоморфны? Как определяется естественная топология на общей линейной группе.

3.Что такое симметрическая группа? Пояснить определение, принятую запись элементов и правила умножения в коммутативной группе. Что такое транспозиции? Доказать, что любая подстановка является произведением транспозиций. Сформулировать определение четности подстановки. Что такое знакопеременная группа? Доказать универсальность группы в классе конечных групп.

4.Что такое подгруппа? Сформулировать и доказать характеристические свойства подгруппы. Что такое тривиальные подгруппы? Что такое порядок и индекс подгруппы? Доказать формулу Лагранжа для конечной группы. Привести примеры подгрупп. Сформулировать определение замкнутой и незамкнутой подгруппы топологической группы. Привести примеры замкнутых и незамкнутых подгрупп.

5.Что такое отношение эквивалентности на множестве? Что такое смежные классы по подгруппе? Что такое нормальный делитель (инвариантная подгруппа)? Что такое тривиальные нормальные делители? Что такое простая группа? Доказать отделимость факторпространства топологической группы по замкнутой подгруппе. Привести пример нехаусдорфова факторпространства.

6.Что такое факторгруппа? Сформулировать определение и доказать корректность умножения в факторгруппе.

7.Что такое центр группы? Сформулировать основные свойства центра. Вычислить центр общей линейной группы.

8.Сформулировать определения гомоморфизма групп, ядра гомоморфизма, привести примеры. Сформулировать и доказать основные свойства гомоморфизмов групп. Что такое изоморфизм групп? Привести примеры изоморфизмов. Сформулировать и доказать критерий изоморфизма групп. Что такое непрерывные гомоморфизмы, непрерывные и топологические изоморфизмы топологических групп? Что такое антигомоморфизмы и антиизоморфизмы групп?

9.Что такое автоморфизм группы, внутренние и внешние автоморфизмы? Привести примеры.

10.Что такое канонический гомоморфизм? Доказать универсальность канонических гомоморфизмов в классах алгебраических и топологических групп.

11.Что такое прямое произведение групп? Привести примеры.

12.Сформулировать определение топологические группы. Доказать существование симметричной окрестности единицы на топологической группе. Сформулировать определение правого и левого сдвига на группе, доказать, что на топологической группе они индуцируют гомеоморфизмы. Доказать, что топология на топологической группе определяется базой окрестностей единицы.

13.Что такое связные топологические группы? Сформулировать и доказать свойства связной компоненты единицы топологической группы. Доказать гомеоморфность компонент связности топологической группы. Доказать, что связная компонента единицы топологической группы порождается любой окрестностью единицы. Привести примеры связных и несвязных групп.

14.Что такое компактные и локально компактные топологические группы? Сформулировать определение равномерной непрерывности. Доказать равномерную непрерывность непрерывной функции на компактной группе. Доказать локальную компактность общей линейной группы и ее замкнутых подгрупп.

15.Сформулировать определения правого и левого действие группы на множестве, представления группы, ассоциированного с действием группы на множестве, эффективного действия, точного представления, свободного действия, непрерывного действие топологической группы на топологическом пространстве.

16.Проанализировать примеры групп преобразований: действие группы Галилея на нерелятивистском пространстве времени; действие групп Лоренца и Пуанкаре в пространстве Минковского; группы вращений и группы Евклида в -мерном евклидового пространстве.

17.Что такое орбита группы преобразований? Доказать, что множество разбивается на орбиты относительно действия группы, привести примеры. Что такое класс сопряженных элементов? Найти классы сопряженных элементов симметрической группы.

18.Что такое однородное пространство, стационарная группа? Привести примеры. Доказать изоморфность стационарных групп точек однородного пространства. Рассмотреть вычисления стационарных групп в примерах вопроса 16. Доказать замкнутость стационарной группы непрерывного действия группы на хаусдорфовом топологическом пространстве.

19.Объяснить конструкцию преобразований факторпространства, индуцированных сдвигами. Построить каноническую модель и каноническую реализацию однородного пространства алгебраической и топологической группы.

20.Что такое билинейная форма на линейном пространстве и группа сохраняющих ее операторов? Что такое матрица билинейной формы и матрица оператора, сохраняющего эту форму? Что такое - ортогональная группа? Что такое симметричные и антисимметричные билинейные функционалы. Как классифицируются (анти)симметричные невырожденные билинейные функционалы. Сформулировать определение евклидовых, псевдоевклидовых и симплектических линейных пространств, ортогональных, псевдоортогональных и симплектических групп.

21.Что такое полуторалинейная форма на линейном пространстве и группа сохраняющих ее операторов? Что такое матрица полуторалинейной формы и матрица оператора, сохраняющего эту форму? Что такое - унитарная группа? Что такое эрмитовы и косоэрмитовы функционалы? Как классифицируются невырожденные эрмитовы функционалы? Сформулировать определение унитарных и псевдоунитарных линейных пространств, унитарных и псевдоунитарных групп. Доказать изоморфизм: .

22.Сформулировать определение и привести примеры линейных -пространств. Какие группы называются классическими?

23.Доказать теорему о полярном разложении. Доказать некомпактность общей и специальной линейной группы. Найти компоненты связности общей и специальной линейной группы. Доказать компактность и найти компоненты связности вещественной ортогональной и унитарной группы.

24.Доказать некомпактность и найти компоненты связности псевдоортогональных групп. Доказать некомпактность и связность псевдоунитарных групп.

25.Сформулировать определение линейного представления. Что такое размерность линейного представления, матрица и матричные элементы конечномерного представления? Что такое фундаментальное представление, единичное представление? Сформулировать определение инвариантного подпространства, неприводимого и приводимого представления, сужение представления на подгруппу и на инвариантное подпространство. Проанализировать пример: вещественное и комплексное тождественные предствления группы SO(2). Доказать существование неприводимого сужения конечномерного представления.

26.Что такое унитарное представление? Каким свойством обладает матрица конечномерного унитарного представления? Доказать существование инвариантного ортогонального дополнения инвариантного подпространства унитарного представления.

27.Что такое сплетающий оператор линейных представлений, линейное пространство сплетающих операторов? Сформулировать определение эквивалентных представлений. Доказать совпадение матричных элементов конечномерных эквивалентных представлений в некоторых базисах. Доказать одновременную приводимость и неприводимость эквивалентных представлений. Что такое унитарная эквивалентность представлений? Сформулировать теорему об унитарной эквивалентности эквивалентных унитарных представлений.

28.Сформулировать и доказать: первую и вторую леммы Шура, теорему о неприводимых представлениях абелевых групп, вторую лемму Шура для унитарных представлений.

29.Что такое прямая сумма конечного числа линейных подпространств? Сформулировать и доказать основные свойства прямой суммы подпространств. Доказать существование дополнительных подпространств к данному линейному подпространству. Что такое прямая сумма линейных пространств? Сводимость к случаю прямой суммы линейных подпространств. Сформулировать определение прямой сумма линейных представлений. Доказать квазидиагонализируемость матрицы прямой суммы конечномерных линейных представлений группы. Что такое вполне приводимые представления? Что такое кратность подпредставления? Привести примеры вполне приводимых и не вполне приводимых представлений. Доказать полную приводимость представлений, эквивалентных унитарным.

30.Что такое тензорное произведение линейных пространств? Как строится стандартный базис в тензорном произведении линейных пространств? Что такое тензорное произведение линейных операторов, тензорное произведение матриц, Матрица тензорного произведения линейных операторов? Сформулировать и доказать корректность определения тензорного произведения линейных представлений. Что является матрицей тензорного произведения представлений. Сформулировать определение представления прямого произведения групп и теорема о неприводимых конечномерных представлениях прямого произведения групп.

31.Сформулировать определения линейного функционала, сопряженного пространства, дуального базиса в сопряженном пространстве. Что такое сопряженный оператор, какая матрица у сопряженного оператора в дуальном базисе? Сформулировать определение контрагредиентного представления. Что является матрицей контрагредиентного представления в дуальном базисе? Доказать одновременную приводимость и неприводимость линейного представления и контрагредиентного ему. Построить изоморфизм линейного пространства и сопряженного ему, индуцированный невырожденной билинейной формой.

32.Сформулировать определения полулинейного функционала, комплексно-сопряженного пространства, дуального базиса в комплексно-сопряженном пространстве. Что такое эрмитово-сопряженный оператор, какая матрица у эрмитово-сопряженного оператора в дуальном базисе? Сформулировать определение сопряженного представления. Что является матрицей сопряженного представления в дуальном базисе?

33.Сформулировать определение и свойства следа линейного оператора. Что такое характер конечномерного представления группы? Сформулировать и доказать основные свойства характеров конечномерных представлений.

34.Сформулировать определение линейного топологического пространства. Что такое замыкание подпространства линейного топологического пространства? Что такое непрерывный линейный оператор? Доказать инвариантность замыкания инвариантного подпространства непрерывного линейного оператора в линейном топологическом пространстве.

35.Сформулировать определение линейного нормированного пространства. Что такое сильная топология линейного нормированного пространства? Что такое ограниченные линейные операторы? Что такое норма линейного ограниченного оператора? Доказать эквивалентность непрерывности и ограниченности для линейных операторов в линейном нормированном пространстве.

36.Как определяется норма в унитарном или гильбертовом линейном пространстве? Сформулировать критерий непрерывности линейного представления топологической группы. Сформулировать и доказать критерий непрерывности унитарного представления. Что такое топологически эквивалентные и топологически неприводимые представления.

37.Сформулировать аксиомы инвариантного среднего функции на топологической группе. Записать инвариантное среднее на конечной группе, на группе и на группе вращений. Сформулировать теорему о существовании и единственности инвариантного среднего на компактной топологической группе. В чем заключается проблема построения инвариантного среднего на некомпактной группе. Как определяется инвариантное среднее вектор-функции на компактной топологической группе?

38.Доказать эквивалентность непрерывного представления компактной топологической группы унитарному представлению. Что такое оператор Вейля унитарного представления компактной группы, указать его свойства. Сформулировать и доказать теорему о конечномерности неприводимых представлений компактных групп. Доказать полную приводимость непрерывного представления компактной группы.

39.Записать и доказать соотношения ортогональности матричных элементов неприводимых представлений компактной группы. Записать соотношения ортогональности для конечной группы.

40.Сформулировать определение полной системы неприводимых представлений группы. Сформулировать и доказать критерий полноты системы неприводимых представлений компактной группы.

41.Сформулировать определения равномерной сходимость последовательности функций на множестве и решетки. Сформулировать и доказать теорему Стоуна – Вейерштрасса (для вещественных и для комплексных функций).

42.Что такое линейная группа? Доказать, что все неприводимые представления линейной компактной группы реализуются в классе тензоров. Сформулировать аппроксимационную теорему Петера-Вейля для произвольной компактной группы (доказать для линейной группы).

43.Доказать полноту системы неприводимых представлений конечной группы. Сформулировать и доказать теоремы Бернсайда. Сформулировать признак делимости для размерности неприводимого представления конечной группы.

44.Что такое ряд Фурье на компактной группе? Как определяются коэффициенты Фурье? Сформулировать и доказать сходимость рядов Фурье в среднем на компактной группе. Записать равенство Парсеваля. Что представляют собой ряды Фурье на конечной группе?

45.Записать и доказать соотношения ортогональности для характеров конечномерных неприводимых представлений компактной группы. Сформулировать и доказать критерий характеров для разложения конечномерного представления компактной группы в прямую сумму неприводимых представлений. Сформулировать и доказать критерий характеров неприводимости представления компактной группы и критерий эквивалентности представлений компактной группы. Сформулировать и доказать свойство полноты системы характеров полной системы неприводимых представлений компактной группы.

46.Что такое регулярное представление компактной группы? Вывести разложение регулярного представления компактной группы в прямую сумму неприводимых представлений.

47.Сформулировать метод проекторов разложения данного унитарного представления компактной группы в прямую сумму неприводимых представлений.

48.Охарактеризовать полную систему неприводимых представлений группы и гармонический анализ на группе .

49.Что такое собственная и полная группы вращений трехмерного евклидова пространства? Что такое углы Эйлера? Вывести выражение матрицы вращения через углы Эйлера. Вывести выражения для инвариантного среднего и меры Хаара на группе вращений.

50.Вывести изоморфизм трехмерного евклидова пространства и пространства бесследовых эрмитовых операторов или бесследовых эрмитовых функционалов на двумерном унитарном пространстве. Вывести свойства ортонормированных базисов в такой реализации. Что такое базисы Паули?

51.Вывести формулу спинорного гомоморфизма. Доказать сюръективность и найти ядро спинорного гомоморфизма. Сформулировать определения контравариантного, ковариантного и сопряженного спинора. Что такое спинорное представление группы вращений. В каком смысле спинорное представление «двузначно»? Доказать эквивалентность спинорного, контрагредиентного и сопряженного ему представлений. Перечислить элементарные инвариантные спинтензоры для группы вращений. Сформулировать правила конвертации векторных индексов в спинорные и наоборот.

52.Как связаны друг представлениями групп SU(2) и SO(3)? Доказать реализуемость всех неприводимых представлений группы в классе полностью симметричных спинтензоров. Что такое однозначные и двузначные неприводимые представления собственной группы вращений? Доказать реализуемость однозначных представлений группы вращений на симметричных бесследовых тензорах. Дать классификацию неприводимые представления полной группы вращений.

53.Доказать неприводимость симметричных спинтензоров. Вычислить характеры неприводимых представлений группы SO(3). Вывести формулу разложения тензорного произведения неприводимых представлений групп SO(3) в прямую сумму неприводимых представлений.

г) Примерные вопросы к коллоквиуму

Билет № 1

1. Определение группы. Единственность единицы и обратного элемента. Коммутативные и некоммутативные группы. Конечные и бесконечные группы. Таблица Кэли конечной группы. Циклические группы конечного и бесконечного порядков.

2. Преобразования факторпространства, индуцированные сдвигами. Каноническая модель и каноническая реализация однородного пространства алгебраической и топологической группы.

Билет № 2

1. Группы эндоморфизмов и автоморфизмов линейного пространства. Общая и специальная линейные группы. Матрица линейного оператора. Изоморфизм групп . Естественная топология на общей линейной группе.

2. Однородные пространства. Примеры. Стационарная группа. Изоморфизм стационарных групп точек однородного пространства. Примеры вычисления стационарных групп. Замкнутость стационарной группы непрерывного действия группы на хаусдорфовом топологическом пространстве.

Билет № 3

1. Симметрическая группа . Определение, принятая запись элементов и правила умножения в . Транспозиции. Представление подстановки в виде произведения транспозиций. Четные и нечетные подстановки. Знакопеременная группа. Универсальность группы в классе конечных групп.

2. Орбиты групп преобразований. Разбиение множества на орбиты относительно действия группы. Классы сопряженных элементов.

Билет № 4

1. Подгруппа. Характеристические свойства подгруппы. Тривиальные подгруппы. Порядок и индекс подгруппы. Формула для конечной группы. Примеры подгрупп. Замкнутые подгруппы топологической группы. Примеры замкнутых и незамкнутых подгрупп.

2. Примеры групп преобразований: действие группы Галилея на нерелятивистском пространстве времени; действие групп Лоренца и Пуанкаре в пространстве Минковского; группа вращений и группа Евклида -мерного евклидового пространства.

Билет № 5

1. Отношение эквивалентности на множестве. Смежные классы по подгруппе. Разбиение группы на смежные классы. Нормальный делитель (инвариантная подгруппа). Тривиальные нормальные делители. Простая группа. Отделимость факторпространства топологической группы по замкнутой подгруппе. Пример нехаусдорфова факторпространства.

2. Билинейная форма на линейном пространстве и группа сохраняющих ее операторов. Матрица билинейной формы и матрица оператора, сохраняющего эту форму. - ортогональная группа. Симметричные и антисимметричные билинейные функционалы. Классификация (анти)симметричных невырожденных билинейных функционалов. Евклидовы, псевдоевклидовы и симплектические линейные пространства. Ортогональные, псевдоортогональные и симплектические группы.

Билет № 6

1. Факторгруппа. Определение и корректность умножения в факторгруппе.

2. Полуторалинейная форма на линейном пространстве и группа сохраняющих ее операторов. Матрица полуторалинейной формы и матрица оператора, сохраняющего эту форму. - унитарная группа. Эрмитовы и косоэрмитовы функционалы. Классификация невырожденных эрмитовых функционалов. Унитарные и псевдоунитарные линейные пространства. Унитарные и псевдоунитарные группы. Изоморфизм .

Билет № 7

1. Центр группы. Основные свойства центра. Центр общей линейной группы.

2. Топологические группы. Существование симметричной окрестности единицы. Правые и левые сдвиги на группе и индуцируемые ими гомеоморфизмы. Определение топологии на группе базой окрестностей единицы.

Билет № 8

1. Гомоморфизм групп. Ядро гомоморфизма. Свойства гомоморфизмов групп. Изоморфизм групп. Критерий изоморфизма групп. Непрерывные гомоморфизмы, непрерывные и топологические изоморфизмы топологических групп. Антигомоморфизмы и антиизоморфизмы.

2. Правое и левое действие группы на множестве. Представление группы, ассоциированное с действием группы на множестве. Эффективные действия, точные представления, свободные действия. Непрерывное действие топологической группы на топологическом пространстве.

Билет № 9

1. Канонический гомоморфизм. Универсальность канонических гомоморфизмов. Универсальность канонических гомоморфизмов топологических групп.

2. Примеры групп преобразований: действие группы Галилея на нерелятивистском пространстве времени; действие групп Лоренца и Пуанкаре в пространстве Минковского; группа вращений и группа Евклида -мерного евклидового пространства.

д) Перечень вопросов, выносимых на экзамен.

Билет № 1

1. Определение группы. Единственность единицы и обратного элемента. Коммутативные и некоммутативные группы. Конечные и бесконечные группы. Таблица Кэли конечной группы. Циклические группы конечного и бесконечного порядков.

2. Линейный функционал. Сопряженное пространство. Дуальные базисы в сопряженном пространстве. Сопряженный оператор, матрица сопряженного оператора в дуальном базисе. Контрагредиентное представление. Матрица контрагредиентного представления в дуальном базисе. Одновременная приводимость и неприводимость линейного представления и контрагредиентного ему. Изоморфизм линейного пространства и сопряженного ему, индуцируемый невырожденной билинейной формой.

Билет № 2

1. Преобразования факторпространства, индуцированные сдвигами. Каноническая модель и каноническая реализация однородного пространства алгебраической и топологической группы.

2. Теорема о полярном разложении. Некомпактность общей и специальной линейной группы. Компоненты связности и линейной связности общей и специальной линейной группы. Компактность и связность вещественной ортогональной и унитарной группы.

Билет № 3

1. Группы эндоморфизмов и автоморфизмов линейного пространства. Общая и специальная линейные группы. Матрица линейного оператора. Изоморфизм групп . Естественная топология на общей линейной группе.

2. След оператора. Характер конечномерного представления группы. Свойства характеров конечномерных представлений.

Билет № 4

1. Однородные пространства. Примеры. Стационарная группа. Изоморфизм стационарных групп точек однородного пространства. Примеры вычисления стационарных групп. Замкнутость стационарной группы непрерывного действия группы на хаусдорфовом топологическом пространстве.

2. Непрерывные действия топологических групп на топологических пространствах. Каноническая модель и каноническая реализация однородного пространства топологической группы. Замкнутость стационарной группы непрерывного действия группы на хаусдорфовом топологическом пространстве.

Билет № 5

1. Симметрическая группа . Определение, принятая запись элементов и правила умножения в . Транспозиции. Представление подстановки в виде произведения транспозиций. Четные и нечетные подстановки. Знакопеременная группа. Универсальность группы в классе конечных групп.

2. Спинорный гомоморфизм . Сюръективность и ядро спинорного гомоморфизма. Контравариантные, ковариантные и сопряженные спиноры. Спинорное представление группы вращений. Двузначность спинорного представления. Эквивалентность спинорного, контрагредиентного и сопряженного ему представлений. Инвариантные спинтензоры. Конвертация векторных индексов в спинорные и наоборот.

Билет № 6

1. Орбиты групп преобразований. Разбиение множества на орбиты относительно действия группы. Классы сопряженных элементов.

2. Связные топологические группы. Свойства связной компоненты единицы топологической группы. Гомеоморфизм компонент связности топологической группы. Порождение связной компоненты любой окрестностью единицы.

Билет № 7

1. Подгруппа. Характеристические свойства подгруппы. Тривиальные подгруппы. Порядок и индекс подгруппы. Формула для конечной группы. Примеры подгрупп. Замкнутые подгруппы топологической группы. Примеры замкнутых и незамкнутых подгрупп.

2. Связь между представлениями групп и . Реализуемость всех неприводимых представлений группы в классе полностью симметричных спинтензоров. Однозначные и двузначные неприводимые представления собственной группы вращений. Реализация однозначных представлений на симметричных бесследовых тензорах. Неприводимые представления полной группы вращений.

Билет № 8

1. Примеры групп преобразований: действие группы Галилея на нерелятивистском пространстве времени; действие групп Лоренца и Пуанкаре в пространстве Минковского; группа вращений и группа Евклида -мерного евклидового пространства.

2. Компактные и локально компактные топологические группы. Равномерная непрерывность. Равномерная непрерывность функций на компактной группе. Локальная компактность общей линейной группы и ее замкнутых подгрупп.

Билет № 9

1. Отношение эквивалентности на множестве. Смежные классы по подгруппе. Разбиение группы на смежные классы. Нормальный делитель (инвариантная подгруппа). Тривиальные нормальные делители. Простая группа. Отделимость факторпространства топологической группы по замкнутой подгруппе. Пример нехаусдорфова факторпространства.

2. Неприводимость симметричных спинтензоров. Характеры неприводимых представлений групп и SO(3).

Билет № 10

1. Билинейная форма на линейном пространстве и группа сохраняющих ее операторов. Матрица билинейной формы и матрица оператора, сохраняющего эту форму. - ортогональная группа. Симметричные и антисимметричные билинейные функционалы. Классификация (анти)симметричных невырожденных билинейных функционалов. Евклидовы, псевдоевклидовы и симплектические линейные пространства. Ортогональные, псевдоортогональные и симплектические группы.

2. Некомпактность и компоненты связности псевдоортогональных групп. Некомпактность и связность псевдоунитарных групп.

Билет № 11

1. Факторгруппа. Определение и корректность умножения в факторгруппе.

2. Топологические группы. Существование симметричной окрестности единицы. Правые и левые сдвиги на группе и индуцируемые ими гомеоморфизмы. Определение топологии на группе базой окрестностей единицы.

Задачи N 11, 29, 47, 65.

Билет № 12

1. Полуторалинейная форма на линейном пространстве и группа сохраняющих ее операторов. Матрица полуторалинейной формы и матрица оператора, сохраняющего эту форму. Эрмитовы и косоэрмитовы функционалы. Классификация невырожденных эрмитовых функционалов. Унитарные и псевдоунитарные линейные пространства. Унитарные и псевдоунитарные группы.

2. Линейное топологическое пространство. Замыкание подпространства линейного топологического пространства. Непрерывный линейный оператор. Инвариантность

замыкания инвариантного подпространства непрерывного линейного оператора в линейном топологическом пространстве.

Билет № 13

1. Центр группы. Основные свойства центра. Центр общей линейной группы.

2. Замкнутые и незамкнутые подгруппы топологической группы. Примеры замкнутых и незамкнутых подгрупп. Естественная топология общей линейной группы и ее подгрупп.

Билет № 14

1. Топологические группы. Существование симметричной окрестности единицы. Правые и левые сдвиги на группе и индуцируемые ими гомеоморфизмы. Определение топологии на группе базой окрестностей единицы.

2. Линейное нормированное пространство. Сильная топология линейного нормированного пространства. Превращение линейного нормированного пространства в линейное топологическое пространство. Ограниченные линейные операторы. Норма линейного ограниченного оператора. Эквивалентность непрерывности и ограниченности для линейных операторов в линейном нормированном пространстве.

Билет № 15

1. Гомоморфизм групп. Ядро гомоморфизма. Свойства гомоморфизмов групп. Изоморфизм групп. Критерий изоморфизма групп. Непрерывные гомоморфизмы, непрерывные и топологические изоморфизмы топологических групп. Антигомоморфизмы и антиизоморфизмы.

2. Отделимость факторпространства топологической группы по замкнутой подгруппе. Пример нехаусдорфова факторпространства.

Билет № 16

1. Правое и левое действие группы на множестве. Представление группы, ассоциированное с действием группы на множестве. Эффективные действия, точные представления, свободные действия. Непрерывное действие топологической группы на топологическом пространстве.

2. Норма в унитарном или гильбертовом линейном пространстве. Непрерывное линейное представление топологической группы. Критерий непрерывности унитарного представления. Топологически эквивалентные представления. Топологически неприводимые представления.

Билет № 17

1. Канонический гомоморфизм. Универсальность канонических гомоморфизмов. Универсальность канонических гомоморфизмов топологических групп.

2. Непрерывные гомоморфизмы, непрерывные и топологические изоморфизмы топологических групп. Универсальность канонических гомоморфизмов топологических групп.

Билет № 18

1. Примеры групп преобразований: действие группы Галилея на нерелятивистском пространстве времени; действие групп Лоренца и Пуанкаре в пространстве Минковского; группа вращений и группа Евклида -мерного евклидового пространства.

2. Инвариантное среднее функции на топологической группе. Примеры: инвариантное среднее на конечной группе, на группе   и на группе вращений. Теорема о существовании и единственности инвариантного среднего на компактной топологической группе, мера Хаара (без доказательства). Проблема построения инвариантного среднего на некомпактной группе. Инвариантное среднее вектор-функции на компактной топологической группе, его свойства.

е) Для эффективного освоения дисциплины студентам рекомендуется:

- после лекции просмотреть и обдумать текст конспекта (15 минут);
- накануне следующей лекции вспомнить материал предыдущей (15 минут);

- изучение теоретического материала по пособию лектора, учебникам и конспекту (1 час в неделю);
- подготовка к практическому занятию (2 часа в неделю);
- работа с литературой в библиотеке (1 час в неделю).
- систематически решать предлагаемые лектором задачи.

12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

1. Наймарк М.А. Теория представлений групп. Наука. 1976.
2. Барут А., Рончка Р, Теория представлений групп и ее приложения, в 2-ух тт.. Мир. 1980.
3. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. Наука. 1984.
4. Эллиот Дж., Доббер П. Симметрия в физике, в 2-ух тт. Мир 1983.
5. Желобенко Д.П. Компактные группы Ли и их представления. Наука. 1970.

б) дополнительная литература:

1. Постников М.М. Лекции по геометрии. СеместрV. Группы и алгебры Ли. Наука. 1982.
2. Зуланке Р., Винтер П. Дифференциальная геометрия и расслоения. Мир. 1975.
3. Шаповалов А.А., Конусов В.Ф., Вааль А.А. Теория конечных групп. ТГУ. 1978.
4. Горбунов И.В. Лекции по теории групп. Представления компактных групп. Представления группы вращений. Томск. НТЛ. 2007.
5. Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли. Мир. 1969.
6. Кириллов А.А. Элементы теории представлений. Наука. 1978.
7. Адамс Дж. Лекции по группам Ли. Наука. 1979.
8. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. Мир. 1970.
9. Уорнер Ф. Основы теории гладких многообразий и групп Ли. Мир. 1981.
10. Ляховский В.Д., Болохов А.А. Группы симметрии и элементарные частицы. ЛГУ. 1983.
11. Хамармеш М. Теория групп и ее физические приложения. УРСС. 2002.
12. М. Гото, Ф.Гроссханс. Полупростые алгебры Ли. Мир. 1981.
13. Г.Вейль Теория групп и квантовая механика. Наука. 1986.
14. Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. Физ.-мат.лит. 1958.
15. Наймарк М.А. Линейные представления группы Лоренца. Физ.мат.лит. 1958.
16. Виленкин И.Я. Специальные функции и теория представлений групп. Наука. 1965.

в) ресурсы сети Интернет:

1. https://scholar.google.ru/
2. https://www.scopus.com/
3. http://www.mathnet.ru/

13. Перечень информационных технологий

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

– Microsoft Office Standart 2013 Russian: пакет программ. Включает приложения: MS Office Word, MS Office Excel, MS Office PowerPoint, MS Office On-eNote, MS Office Publisher, MS Outlook, MS Office Web Apps (Word Excel MS PowerPoint Outlook); системы компьютерной вёрстки LaTex;

– публично доступные облачные технологии (Google Docs, Яндекс диск и т.п.).

б) информационные справочные системы:

– Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ – http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system

– Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ – http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index

– ЭБС Лань – http://e.lanbook.com/
– ЭБС Консультант студента – http://www.studentlibrary.ru/
– Образовательная платформа Юрайт – https://urait.ru/
– ЭБС ZNANIUM.com – https://znanium.com/
– ЭБС IPRbooks – http://www.iprbookshop.ru/

14. Материально-техническое обеспечение

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения практических занятий, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

Аудитории для проведения занятий лекционного типа, практических занятий, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации в смешенном формате, оснащенные системой («Актру»).

15. Информация о разработчиках

Шарапов Алексей Анатольевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры квантовой теории поля физического факультета ТГУ, заведующий лабораторией теоретической и математической физики.