

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДАЮ:  
Директор



А. В. Замятин

20 22 г.

Рабочая программа дисциплины

**Математическая статистика**

по направлению подготовки

**01.03.02 Прикладная математика и информатика**

Направленность (профиль) подготовки:

**Математическое моделирование и информационные системы**

Форма обучения

**Очная**

Квалификация

**Бакалавр**

Год приема

**2022**

Код дисциплины в учебном плане: Б1.О.02.07

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОП

А.М. Горцев

Председатель УМК

С.П. Сущенко

Томск – 2022

## **1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины**

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

– ОПК-1 – способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности;

– ОПК-3 – способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК-1.1. Демонстрирует навыки работы с учебной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам.

ИОПК-1.2. Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин.

ИОПК-1.3. Демонстрирует навыки использования основных понятий, фактов, концепций, принципов математики, информатики и естественных наук для решения практических задач, связанных с прикладной математикой и информатикой.

ИОПК-1.4. Демонстрирует понимание и навыки применения на практике математических моделей и компьютерных технологий для решения практических задач, возникающих в профессиональной деятельности

ИОПК-3.1. Демонстрирует навыки применения современного математического аппарата для построения адекватных математических моделей реальных процессов, объектов и систем в своей предметной области.

ИОПК-3.2. Демонстрирует умение собирать и обрабатывать статистические, экспериментальные, теоретические и т.п. данные для построения математических моделей, расчетов и конкретных практических выводов.

ИОПК-3.3. Демонстрирует способность критически переосмысливать накопленный опыт, модифицировать при необходимости вид и характер разрабатываемой математической модели.

ИОПК-3.4. Демонстрирует понимание и умение применять на практике математические модели и компьютерные технологии для решения различных задач в области профессиональной деятельности.

## **2. Задачи освоения дисциплины**

– Освоить аппарат математической статистики, ее методы, основные понятия и задачи.

– Научиться применять методы математической статистики для решения практических задач профессиональной деятельности.

## **3. Место дисциплины в структуре образовательной программы**

Дисциплина относится к обязательной части образовательной программы. Дисциплина входит в модуль «Математика».

## **4. Семестр освоения и формы промежуточной аттестации по дисциплине**

Пятый семестр, экзамен

## **5. Входные требования для освоения дисциплины**

Для успешного освоения дисциплины требуются компетенции, сформированные в ходе освоения образовательных программ предшествующего уровня образования. Для успешного освоения дисциплины требуются результаты обучения по следующим

дисциплинам: «Математический анализ», «Линейная алгебра и аналитическая геометрия», «Теория вероятностей».

## **6. Язык реализации**

Русский

## **7. Объем дисциплины**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 з.е., 144 часа, из которых:

– лекции: 32 ч.

– практические занятия: 32 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

## **8. Содержание дисциплины, структурированное по темам**

### **Тема 1. Элементы выборочной теории**

Случайная выборка. Статистика. Порядковые статистики, вариационный ряд. Эмпирическая функция распределения, ее статистические свойства. Теорема Гливленко и теорема Колмогорова для эмпирической функции распределения. Эмпирическая плотность распределения: гистограмма, полигон частот, ядерная оценка плотности. Эмпирическая функция распределения и ядерная оценка плотности в случае многомерной выборки.

### **Тема 2. Выборочные характеристики**

Примеры выборочных характеристик (выборочное среднее, выборочная дисперсия, выборочные квантили, выборочный коэффициент корреляции и др.). Выборочные характеристики как функционалы от эмпирической функции распределения. Два типа статистик. Теоремы непрерывности для функций от выборочных моментов. Асимптотическая нормальность выборочных моментов.

### **Тема 3. Точечное оценивание параметров распределения**

Точечное оценивание. Статистические оценки и общие требования к ним. Состоятельность, асимптотическая нормальность. Несмещенные оценки с минимальной дисперсией. Оптимальные оценки. Понятие функции правдоподобия, вклада выборки, функции информации Фишера. Неравенство Рао-Крамера и эффективные оценки. Экспоненциальная модель. Неравенство Рао-Крамера в случае векторного параметра. Достаточные статистики и оптимальные оценки. Критерий факторизации.

### **Тема 4. Методы точечной оценки параметров распределений**

Метод подстановки. Метод моментов. Метод максимального правдоподобия (ММП). Принцип инвариантности для ММП, асимптотические свойства оценок ММП. Мультиномиальные оценки максимального правдоподобия. Байесовский и минимаксный подходы к оцениванию параметров.

### **Тема 5. Интервальное оценивание**

Понятие доверительного интервала. Построение доверительных интервалов для математического ожидания случайной величины в случаях известной и неизвестной дисперсии. Доверительные интервалы для неизвестной дисперсии при неизвестных других параметрах. Доверительные интервалы для среднего и дисперсии в случае нормальной модели. Доверительные области для многомерного параметра.

### **Тема 6. Проверка статистических гипотез**

Понятие статистической гипотезы и статистического критерия. Простые и сложные гипотезы. Общий принцип построения статистических критериев и их характеристики. Статистика критерия, критическая область критерия. Уровень значимости, функция мощности и мощность критерия. Несмещенные и состоятельные критерии. Критерии Проверка гипотез о виде распределения. Критерии согласия Колмогорова и хи-квадрат К. Пирсона для простых гипотез, критерий согласия хи-квадрат для сложной гипотезы. Гипотеза однородности. Критерии однородности Смирнова, хи-квадрат, Манна-Уитни. Гипотеза независимости. Критерий независимости хи-квадрат. Критерий Спирмена.

#### **Тема 7. Параметрические гипотезы**

Понятие параметрической гипотезы. Общий принцип выбора критической области. Вероятности ошибок первого и второго родов. Равномерно наиболее мощные критерии. Критерий Неймана-Пирсона для проверки двух простых гипотез. Сложные гипотезы. Критерий отношения правдоподобия проверки общих гипотез. Байесовское решающее правило.

### **9. Текущий контроль по дисциплине**

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, проведения контрольных работ, тестов по лекционному материалу, выполнения домашних заданий и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр.

### **10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации**

Экзамен в пятом семестре проводится в письменной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из пяти вопросов. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

Первый вопрос представляет собой теоретическую часть курса, излагается в развернутой форме, проверяет ИУК-1.1.

Ответы на вопросы со второго по пятый предполагают решение задач в развернутой форме, краткую интерпретацию полученных результатов и проверяют ИОПК-2.2 и ИПК-3.3.

Перечень теоретических вопросов

1. В чем отличие теории вероятностей от математической статистики. Задачи математической статистики;
2. Случайная выборка, статистика, порядковая статистика;
3. Эмпирическая функция распределения (э.ф.р.) для одномерной случайной величины;
4. Статистические свойства э.ф.р. при конечном объеме выборки;
5. Предельные теоремы для э.ф.р.
6. Гистограмма и полигон частот;
7. Ядерная оценка плотности для одномерной случайной величины;
8. Асимптотические свойства ядерной оценки плотности;
9. Э.ф.р. и ядерная оценка плотности для многомерной выборки
10. Выборочное среднее, статистические свойства;
11. Выборочная дисперсия, подправленная выборочная дисперсия;
12. Выборочная квантиль порядка  $p$ ;
13. Выборочный коэффициент корреляции;
14. Асимптотическая нормальность выборочных моментов;
15. Теорема непрерывности для функций от выборочных моментов;
16. Точечная оценка, примеры;
17. Состоятельные оценки, несмещенные оценки;
18. Оптимальные оценки;
19. Функция правдоподобия;
20. Функция вклада выборки;

21. Функция информации Фишера;
22. Что показывает неравенство Рао-Крамера;
23. Эффективные оценки, критерий эффективности;
24. Достаточные статистики;
25. Критерий факторизации;
26. Метод подстановки оценивания параметров;
27. Метод моментов в оценке параметров распределения;
28. Метод максимального правдоподобия оценивания параметров;
29. Метод мультиномиального правдоподобия оценивания параметров;
30. Байесовское оценивание параметров;
31. Минимаксное оценивание параметров;
32. Доверительный интервал;
33. Доверительные области;
34. Статистическая гипотеза и статистический критерий;
35. Критическая область критерия;
36. Уровень значимости критерия;
37. Мощность критерия;
38. Несмещенность критерия;
39. Состоятельность критерия;
40. Гипотеза о виде распределения, критерии согласия;
41. Гипотеза однородности, критерии однородности;
42. Гипотеза независимости, критерии независимости;
43. Параметрические гипотезы. Общий принцип выбора критической области.
44. Вероятности ошибок первого и второго родов.
45. Равномерно наиболее мощные критерии.
46. Критерий Неймана-Пирсона для проверки двух простых гипотез.
47. Сложные гипотезы. Критерий отношения правдоподобия проверки общих гипотез.
48. Байесовское решающее правило.

#### Примеры задач:

Статистическое оценивание.

**Задача 1.** По реализации выборки  $X_1, \dots, X_n$  построить оценку методом максимального правдоподобия для параметра экспоненциального распределения.

**Задача 2.** По реализации выборки  $X_1, \dots, X_n$  построить оценку методом максимального правдоподобия для параметра закона Пуассона.

**Задача 3.** По реализации выборки  $X_1, \dots, X_n$  построить оценки методом максимального правдоподобия для параметров нормального распределения.

**Задача 4.** Построить доверительный интервал для математического ожидания по реализации выборки -1.25, 0.11, 2.37, 3.45 из нормального закона с дисперсией, равной 0,49. Принять  $\gamma=0.96$ .

**Задача 5.** Построить доверительный интервал для математического ожидания по реализации выборки -1.62, .54, 2.12, 3.72 из нормального закона с неизвестной дисперсией. Принять  $\gamma=0.98$ .

**Задача 6.** Построить доверительный интервал для математического ожидания случайной величины  $X$  с дисперсией, равной 4, при выборке объема  $n=100$  и выборочному среднему равному 10. Принять  $\gamma=0.97$ .

**Задача 7.** Подсчитайте ранговый коэффициент корреляции Спирмена между двумя случайными величинами  $X$  и  $Y$  по следующим данным:

$$X_1=1,5, \quad X_2=2, \quad X_3=4, \quad X_4=1, \quad X_5=3$$

$$Y_1=3, \quad Y_2=2, \quad Y_3=2,1, \quad Y_4=1, \quad Y_5=4$$

**Задача 8.** Найти достаточную статистику для: параметра распределения Пуассона, для параметров равномерного в  $[a, b]$  распределения, для параметров нормального распределения.

Проверка статистических гипотез

**Задача 9.** При 65 подбрасываниях монеты герб появился 25 раз. Можно ли считать монету симметричной? Принять уровень значимости  $\alpha=0.10$ .

**Задача 10.** При 160 подбрасываниях игральной кости шестерка выпала 25 раз. Можно ли считать кость правильной? Принять  $\alpha=0.05$ .

**Задача 11.** При 120 подбрасываниях игральной кости пятерка выпала 25 раз, а шестерка 15 раз. Можно ли считать кость правильной? Принять  $\alpha=0.01$ .

**Задача 12.** Можно ли считать два потока абитуриентов однородными, если итоги экзамена по математике на каждом потоке оказались следующими:

1-й поток: баллы «2», «3», «4» и «5» получили соответственно 45, 40, 70 и 35 человек;

2-й поток: баллы «2», «3», «4» и «5» получили соответственно 40, 35, 65 и 30 человек.

Уровень значимости  $\alpha=0,05$ .

**Задача 13.** Комплектующие изделия одного наименования поступают с трех предприятий А, В, и С. Результаты проверки изделий следующие. Предприятие А: годные – 30, негодные - 2, предприятие В: годные - 38, негодные – 3, предприятие С: годные - 54, негодные – 7. Можно ли считать, что качество изделий не зависит от поставщика?

Принять уровень значимости  $\alpha=0,1$ .

**Задача 14.** По реализации выборки -1.56, 0.22, 2.34, 3.75 из нормального закона с дисперсией, равной 0,49, и неизвестным математическим ожиданием  $a$  проверить гипотезы  $H_0: a= 1.2$  и  $H_1: a= 2$ . Принять уровень значимости  $\alpha=0,01$ .

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно». Экзаменационный билет состоит из пяти заданий (вопросов).

Если студент ответил на пять вопросов, то ставится оценка «отлично», на четыре вопроса – оценка «хорошо», на три вопроса – оценка «удовлетворительно», на два вопроса – оценка «неудовлетворительно».

## 11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «Moodle» - <https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=00000>

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине (Приложение 1).

в) План семинарских / практических занятий по дисциплине.

г) Методические указания по организации самостоятельной работы студентов.

## 12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

– Ивченко Г.И. Математическая статистика: Учебник / Г. И. Ивченко, Ю.И. Медведев - Москва: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014. - 352 с.

– Боровков А. А. Математическая статистика: учебник / А. А. Боровков. - Изд. 4-е, стер. - Санкт-Петербург [и др.]: Лань, 2010. - 703 с.: табл.- URL: [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_cid=25&pl1\\_id=3810](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=3810).

– Ивченко Г. И. Введение в математическую статистику / Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев. - Москва: Изд-во ЛКИ, сор. 2010. - 599 с.

б) дополнительная литература:

- Бородин А. Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики: [учебное пособие для вузов по нематематическим специальностям] / А. Н. Бородин. - Изд. 8-е, стер. - Санкт-Петербург [и др.]: Лань, 2016. - 254 с.
- Шуленин В. П. Математическая статистика: [учебник] / В. П. Шуленин ; Том. гос. ун-т. – Томск : Изд-во НТЛ, 2012. – Ч. 1. – 539 с. – URL: <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000434962> ; Ч. 2. – 387 с. – URL: <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000434963> ; Ч. 3. – 518 с. – URL: <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000440075> – URL: [http://e.lanbook.com/books/element.php?p11\\_cid=25&p11\\_id=2026](http://e.lanbook.com/books/element.php?p11_cid=25&p11_id=2026).
- Ватугин В. А. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах: учеб. пособие для вузов / В. А. Ватугин, Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев, В. П. Чистяков. - М.: Дрофа, 2005. - 315 с.
- Ивченко Г.И., Медведев Ю.И., Чистяков А.В. Задачи с решениями по математической статистике – М.: Дрофа, 2007.
- в) ресурсы сети Интернет:
  - открытые онлайн-курсы
  - Журнал «Эксперт» - <http://www.expert.ru>
  - Официальный сайт Федеральной службы государственной статистики РФ - [www.gsk.ru](http://www.gsk.ru)
  - Официальный сайт Всемирного банка - [www.worldbank.org](http://www.worldbank.org)
  - Общероссийская Сеть КонсультантПлюс Справочная правовая система. <http://www.consultant.ru>

- в) информационные справочные системы:
  - Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ – <http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system>
  - Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ – <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index>
  - ЭБС Лань – <http://e.lanbook.com/>
  - ЭБС Консультант студента – <http://www.studentlibrary.ru/>
  - Образовательная платформа Юрайт – <https://urait.ru/>
  - ЭБС ZNANIUM.com – <https://znanium.com/>
  - ЭБС IPRbooks – <http://www.iprbookshop.ru/>

### 13. Перечень информационных технологий

- а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:
  - Microsoft Office Standart 2013 Russian: пакет программ. Включает приложения: MS Office Word, MS Office Excel, MS Office PowerPoint, MS Office On-eNote, MS Office Publisher, MS Outlook, MS Office Web Apps (Word Excel MS PowerPoint Outlook);
  - публично доступные облачные технологии (Google Docs, Яндекс диск и т.п.).
- б) информационные справочные системы:
  - Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ – <http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system>
  - Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ – <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index>
  - ЭБС Лань – <http://e.lanbook.com/>
  - ЭБС Консультант студента – <http://www.studentlibrary.ru/>
  - Образовательная платформа Юрайт – <https://urait.ru/>
  - ЭБС ZNANIUM.com – <https://znanium.com/>
  - ЭБС IPRbooks – <http://www.iprbookshop.ru/>

в) профессиональные базы данных:  
– Университетская информационная система РОССИЯ – <https://uisrussia.msu.ru/>  
– Единая межведомственная информационно-статистическая система (ЕМИСС) – <https://www.fedstat.ru/>

#### **14. Материально-техническое обеспечение**

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

#### **15. Информация о разработчиках**

Дмитриев Юрий Глебович, д-р физ.-мат. наук, доцент, кафедра системного анализа и математического моделирования, профессор.