Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ:
Декан ММФ ТГУ
Л. В.Гензе

Рабочая программа дисциплины
Уравнения математической физики

по направлениям подготовки

01.03.01 Математика
Направленность (профиль) подготовки :
Основы научно-исследовательской деятельности в области математики,

02.03.01 Математика и компьютерные науки
Направленность (профиль) подготовки :
Основы научно-исследовательской деятельности в области математики и компьютерных наук,

01.03.03 Механика и математическое моделирование
Направленность (профиль) подготовки :
Основы научно-исследовательской деятельности в области механики и математического моделирования

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2023

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
Л.В. Гензе

Председатель УМК
Е.А. Тарасов

Томск – 2023

1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики как для использования в профессиональной деятельности, так и для консультирования.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Демонстрирует навыки работы с профессиональной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам

ИОПК 1.2 Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин

ИОПК 1.3 Владеет фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук

2. Задачи освоения дисциплины

– Освоить теоретический фундамент аналитических методов решения стандартных задач математической физики (ИОПК 1.3).

– Освоить применение основных аналитических методов решения стандартных задач математической физики (ИОПК 1.2).

– Научиться понимать и применять монографии и учебники по математической физики в образовательном процессе (ИОПК 1.1).

3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к Блоку 1 «Дисциплина (модули)».

Дисциплина относится к обязательной части образовательной программы.

4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине

Пятый семестр, зачет

Шестой семестр, экзамен

5. Входные требования для освоения дисциплины

Основы дифференциального и интегрального исчисления, теории и практики дифференциальных уравнений, ряд ключевых фактов комплексного анализа, функционального анализа, общей топологии.

6. Язык реализации

Русский

7. Объем дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 7 з.е., 252 часов, из которых:

-лекции: 64 ч.

-практические занятия: 64 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

8. Содержание дисциплины, структурированное по темам

Темы:

1. **Постановка основных краевых задач математической физики** (Задача о малых поперечных колебаниях струны, о малых продольных колебаниях стержня, о распространении тепла в области, о диффузии). ИОПК 1.1, 1.3.

2. **Приведение квазилинейных уравнений к каноническому виду** (Классификация квазилинейных уравнений. Теоремы о существовании канонизирующих замен переменных в точке и в области. Приведение уравнений к каноническому виду в области. Вторая каноническая форма уравнений гиперболического типа) ИОПК 1.2, 1.3.

3. **Метод Даламбера** (Решение задач Гурса, Коши и смешанных задач для одномерного волнового уравнения методом Даламбера). ИОПК 1.2.

4. **Задача Штурма – Лиувилля и метод Фурье** (Собственные значения и собственные функции задачи Штурма – Лиувилля, их свойства. Решение задач Коши, стационарных задач, смешанных задач методом Фурье). ИОПК 1.1, 1.2, 1.3.

5. **Основные и обобщённые функции** (Способы задания основных функций, аппроксимационные теоремы, пространства $D(G)$, $S(\mathbb{R}^n)$ и их свойства. Регулярные и сингулярные обобщённые функции. Примеры. Носитель обобщённой функции. Теорема Дю Буа Реймона. Теорема о полноте пространства $D'(G)$. Дифференцирование обобщённых функций.). ИОПК 1.1, 1.3.

6. **Прямое произведение и свёртка обобщённых функций** (Теорема о корректности и коммутативности прямого произведения. Условия существования и основные свойства свёртки. Теорема о дифференцировании свёртки). ИОПК 1.1, 1.2, 1.3.

7. **Преобразование Фурье, Лапласа и Радона основных и обобщённых функций** (Основные свойства и формулы обращения для преобразований Фурье, Лапласа и Радона. Связь преобразований Фурье и Лапласа с операциями дифференцирования и свёртки). ИОПК 1.1, 1.3.

8. **Фундаментальные решения дифференциальных операторов** (Построение фундаментального решения обыкновенного дифференциального оператора, оператора теплопроводности и волнового оператора. Метод спуска. Фундаментальное решение оператора Лапласа). ИОПК 1.1, 1.3.

9. **Обобщённая задача Коши** (Классические и обобщённые решения дифференциальных уравнений. Понятие обобщённой задачи Коши. Теоремы о корректности обобщённых задач Коши для волнового уравнения и уравнения теплопроводности. Метод потенциалов решения обобщённых задач Коши). ИОПК 1.2, 1.3.

10. **Стационарные краевые задачи** (Теорема об интегральном представлении. Функция Грина оператора Лапласа для различных областей. Её построение методом отражений, методом конформных отображений. Решение стационарных краевых задач методом функций Грина. Корректность стационарных краевых задач). ИОПК 1.1, 1.2, 1.3.

11. **Пространства Соболева и разрешимость стационарных краевых задач** (Определение и теорема о полноте пространств Соболева. Неравенство Фридрихса. Разрешимость задач Дирихле и Неймана в пространствах Соболева). ИОПК 1.1, 1.3.

9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, индивидуального домашнего задания (далее – ИДЗ) в форме реферата (ИОПК 1.1), опросов по домашним заданиям (ИОПК 1.2, 1.3), проверки выполнения ИДЗ (ИОПК 1.2), тестов по лекционному материалу (ИОПК 1.3) и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр.

10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Зачёт в пятом семестре проводится в устной форме по билетам. Билет содержит теоретический вопрос и две задачи. Ответ на теоретический вопрос проверяет сформированность ИОПК 1.1, 1.3 на уровне понимания терминологии и формулировок теорем, относящихся к материалу пятого семестра, их взаимосвязей.

Примерный перечень теоретических вопросов:

1. Примеры краевых задач для одномерного волнового уравнения (без вывода). Физический смысл типичных краевых условий. Тип одномерного волнового уравнения.
2. Примеры краевых задач для уравнения теплопроводности (без вывода). Физический смысл типичных краевых условий. Тип уравнения теплопроводности.
3. Примеры краевых задач для стационарного уравнения (без вывода). Физический смысл стационарного уравнения и типичных краевых условий. Тип стационарного уравнения.
4. Канонизирующая замена переменных для одномерного волнового уравнения. Его канонический вид и общее решение. Применение общего решения для решения краевых задач.
5. Задача Штурма – Лиувилля, её собственные функции и значения. Свойства собственных функций задачи Штурма – Лиувилля и их применение для решения краевых задач.
6. Основные функции из пространства $D(G)$. Примеры. «Шапочки» и их применение для построения основных функций.
7. Основные функции из пространства $S\left(\mathbb{R}^n\right)$. Примеры. Сходимость последовательностей в пространствах $D\left(\mathbb{R}^n\right)$ и $S\left(\mathbb{R}^n\right)$. Связь этих пространств между собой.
8. Теорема об аппроксимации основными функциями. Способ построения аппроксимирующей последовательности.
9. Обобщённые функции из пространства $D'\left(\mathbb{R}^n\right)$. Равенство нулю в области. Носитель.
10. Регулярные обобщённые функции. Примеры. Равенство нулю в области. Носитель. Теорема дю Буа Реймона.
11. Сингулярные обобщённые функции. Примеры. Функция Дирака, её основные свойства.
12. Понятие сходимости последовательности обобщённых функций. Примеры. Теорема о полноте пространства обобщённых функций.
13. Мультипликаторы в $D\left(\mathbb{R}^n\right)$ и $S\left(\mathbb{R}^n\right)$. Умножение обобщённой функции на мультипликатор. Примеры.
14. Производная от обобщённой функции. Примеры. Формула обобщённой производной от кусочно гладкой функции.
15. Определение прямого произведения и свёртки обобщённых функций. Условия существования свёртки. Основные свойства свёртки.

Решение задач проверяет сформированность ИОПК 1.2.

Примеры задач:

1. Найти стационарную температуру в точках (r,φ) круглой тонкой пластины радиуса $R=5$, если к её краю подводится тепловой поток $\cos\varphi+\sin 2\varphi$.

2. Решить краевую задачу $\begin{array}{l} u_{xx} + 6u_{xy} + 5u_{yy} = 0,\ 0 < x < y < 5x, \\ u(x,x) = x + 1,\ u(x,5x) = \cos x. \end{array}$.

При успешном выполнении всех четырёх ИДЗ по результатам текущего контроля студент освобождается от решения задач на зачёте. Если успешно выполнены только два или три ИДЗ, то студенту на зачёте предлагается одна задача. Аналогичным образом может быть поощрена систематическая активная работа студента на практических занятиях в течение семестра.

Если студент показывает знание основных понятий и фактов курса, в целом правильно описывает их взаимосвязи, умеет выбирать метод решения поставленной задачи и без существенных ошибок применяет его, то ему выставляется оценка «зачтено». В противном случае выставляется оценка «не зачтено».

При отсутствии попытки сдать зачёт, студенту выставляется отметка «не явился».

Экзамен в шестом семестре проводится в устной форме по билетам. Экзаменационный билет содержит два теоретических вопроса и задачу. Ответ на первый вопрос проверяет сформированность ИОПК 1.1 и, частично, ИОПК 1.3. Ответ на второй вопрос проверяет сформированность ИОПК 1.3. Решение задачи проверяет сформированность ИОПК 1.2.

Примерный перечень теоретических вопросов:

1. Классификация линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка
2. Задача Штурма–Лиувилля и метод разделения переменных
3. Свёртка обобщённых функций и её применения
4. Преобразование Фурье обобщённых функций и его применения
5. Теорема о полноте пространства *D’*(*G*) и её применения
6. Принцип максимума для гармонических функций и его применения
7. Дифференцирование обобщённых функций. Его связь с другими операциями
8. Фундаментальные решения волнового оператора и их основные свойства
9. Фундаментальные решения оператора теплопроводности и их основные свойства
10. Фундаментальные решения оператора Лапласа и их основные свойства
11. Волновые потенциалы и их основные свойства
12. Тепловые потенциалы и их основные свойства
13. Постановка основных краевых задач математической физики и их корректность
14. Теорема Рисса и её применение в теории краевых задач для уравнения Пуассона
15. Пространство основных функций *D*(*G*) и его применения
16. Пространства основных функций $D\left(\mathbb{R}^n\right)$ и $S\left(\mathbb{R}^n\right)$. Сравнение их между собой. Применение пространства $S\left(\mathbb{R}^n\right)$.
17. Докажите лемму «О связи шапочек»: $\omega_a(x) = a^{-n} \cdot \omega\left(a^{-1} \cdot x\right)$.
18. Докажите, что «шляпа» $\eta_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi_2(y) \cdot \omega_1(x-y)dy$ – финитная функция.
19. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – интегрируемая функция с компактным носителем. Докажите, что функция $f_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y) \cdot \omega_1(x-y)dy$ принадлежит пространству $D\left(\mathbb{R}\right)$.
20. Докажите, что $D\left(\mathbb{R}\right)$ – векторное пространство.

21. Докажите, что $D'(\mathbb{R})$ – векторное пространство.

22. Докажите, что функция Дирака линейна и непрерывна на пространстве $D(\mathbb{R})$.

23. Докажите, что функция Дирака сингулярна.

24. Докажите, что носитель функции Дирака состоит из единственной точки $x = 0$.

25. Докажите равенства $x \cdot \delta(x) = 0$ и $x \cdot \mathrm{P}\frac{1}{x} = 1$.

26. Докажите, что $\theta(n-x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ в $S'(\mathbb{R})$.

27. Докажите, что $\theta(x-n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ в $S'(\mathbb{R})$.

28. Докажите, что $\theta'(x) = \delta(x)$.

29. Пусть $f, g \in D'(\mathbb{R})$, функция a бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$. Докажите равенство $\left(a(x) \cdot f(x)\right)' = a(x) \cdot f'(x) + a'(x) \cdot f(x)$ для обобщённой производной.

30. Пусть $\varphi = \varphi(x_1, x_2) \in D\left(\mathbb{R}^2\right)$, $f(x_1) \in D'(\mathbb{R})$. Докажите, что функция $\psi(x_2) = \left(f(x_1), \varphi(x_1, x_2)\right)$ имеет компактный носитель.

31. Докажите, что $\delta(x_1, ..., x_n) = \delta(x_1) \times ... \times \delta(x_n)$.

32. Пусть f – обобщённая функция с компактным носителем $K \subset \mathbb{R}^n$, η – основная функция – «шляпа над K». Докажите, что обобщённые функции $f(x)$ и $\eta(x) \cdot f(x)$ равны.

33. Докажите, что $\left(f_1(x) + f_2(x)\right) * g(x) = f_1(x) * g(x) + f_2(x) * g(x)$ (аддитивность свёртки).

34. Докажите, что $F[\varphi'(x)](\lambda) = -i\lambda \cdot F\left[\varphi(x)\right](\lambda)$. Здесь $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

35. Вычислите $F[\delta(x+1)](\lambda)$. Здесь $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

36. Докажите, что преобразование Лапласа линейно.

37. Докажите, что $L\left[\int\limits_0^t f(s)ds\right](p) = \frac{1}{p} \cdot L\left[f(t)\right](p)$.

38. Докажите, что $L\left[e^{\lambda t} \cdot f(t)\right](p) = L\left[f(t)\right](p-\lambda)$

39. Пусть D – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, $\mathcal{E}$ – его фундаментальное решение. Докажите, что $D(\mathcal{E} * f) = f$.

40. Пусть $\mathcal{E}_2(t,x)$ – фундаментальное решение оператора теплопроводности (в размерности 2). Докажите, что $\int\limits_{\mathbb{R}^2} \mathcal{E}_2(t,x)dx = 1$.

41. Докажите, что удлинением струны в процессе малых поперечных колебаний можно пренебречь.

Примеры задач:

1. Найдите свёртку $x \cdot \theta\left(1-|y|\right) * y \cdot \theta\left(1-|x|\right)$.

2. Решить обобщённую задачу Коши $u_t - u_{xx} - u_{yy} = y \cdot e^{-x^2} \cdot \delta(t)$.

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Получение студентом одной из оценок «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», предполагает наличие у него оценки «зачтено» за пятый семестр.

При успешном и своевременном выполнении всех ИДЗ студент освобождается от решения задачи на экзамене. Аналогичным образом может быть поощрена систематическая активная работа студента на практических занятиях в течение года.

Успешное выполнение не менее 4/5 тестов на лекционный материал при выполнении всех ИДЗ и при постоянной результативной работе на занятиях может (но не обязательно) послужить основанием для выставления студенту оценки «отлично» или «хорошо» автоматически, без сдачи экзамена.

При выставлении оценки за ответ на экзамене соблюдаются следующие критерии:
«Отлично» – Правильное формулирование определений и теорем. Правильное объяснение связей между ними. Полное и правильное доказательство теоремы. Отсутствие долгов за практическую часть курса, или правильное решение случайной задачи по любой теме курса.
«Хорошо» – То же, но доказательство теоремы и решение задачи содержат некритичные пробелы/арифметические ошибки.
«Удовлетворительно» – В целом правильное формулирование определений и теорем при неспособности привести доказательство. При наличии задолженности за практическую часть курса – схематичный набросок решения задачи вместо полного решения.
«Неудовлетворительно» – Грубые ошибки в формулировках определений и теорем. Неспособность решить задачу.

11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «Moodle» - https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=630 (5 семестр),
https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=13177 (6 семестр).

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

в) Настоящая рабочая программа.

12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:
1. В.С. Владимиров. Уравнения математической физики. М. : Физматлит , 2008;
2. Сборник задач по уравнениям математической физики/ под ред. В.С. Владимирова, М.: Физматлит , 2004;

б) дополнительная литература:
1. В.Г. Багров, В.В. Белов, В.Н. Задорожный, А.Ю. Трифонов. Методы математической физики. Томск : Изд-во НТЛ , 2002;
2. О.А. Олейник. Лекции об уравнениях с частными производными. 3-е изд. М.: Бином, 2011;
3. М.С. Агранович. Обобщённые функции. М.: Изд-во МЦИМО, 2008;

в) ресурсы сети Интернет: http://journals.tsu.ru/mathematics/

13. Перечень информационных технологий

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

– Microsoft Office Standart 2013 Russian: пакет программ. Включает приложения: MS Office Word, MS Office Excel, MS Office PowerPoint, MS Office On-eNote, MS Office Publisher, MS Outlook, MS Office Web Apps (Word Excel MS PowerPoint Outlook);

– публично доступные облачные технологии (Google Docs, Яндекс диск и т.п.).

б) информационные справочные системы:

– Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ – http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system

– Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ – http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index

14. Материально-техническое обеспечение

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

15. Информация о разработчиках

Лазарев Вадим Ремирович, кандидат ф.-м. н., кафедра математического анализа и теории функций, доцент.