Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ:
Декан
_______________Л. В.Гензе
« 31 » _____06_____ 20 22 г.

Рабочая программа дисциплины

Функциональный анализ

по направлению подготовки

01.03.01 Математика

Направленность (профиль) подготовки :
Основы научно-исследовательской деятельности в области математики

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2022

Код дисциплины в учебном плане: Б1.О.2.02

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
_________________Л.В. Гензе

Председатель УМК
_________________Е.А. Тарасов

Томск – 2022

1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики как для использования в профессиональной деятельности, так и для консультирования.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Демонстрирует навыки работы с профессиональной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам

ИОПК 1.2 Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин

ИОПК 1.3 Владеет фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук

2. Задачи освоения дисциплины

– Освоить основные понятия функционального анализа, изучить основные принципы функционального анализа, получить необходимые знания теории операторов в банаховых и гильбертовых пространствах для дальнейшего самостоятельного изучения математической литературы.

– Научиться использовать теоретические знания для решения интегральных и дифференциальных уравнений, задач о наилучшем приближении в конкретных пространствах, о характере сходимости последовательностей, о разложении в ряды Фурье, о нахождении спектра об исследовании свойств операторов и других практических задач профессиональной деятельности.

3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к Блоку 1 «Дисциплина (модули)».
Дисциплина относится к обязательной части образовательной программы.

4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине

Пятый семестр, экзамен

5. Входные требования для освоения дисциплины

Для успешного освоения дисциплины требуются результаты обучения по следующим дисциплинам: математический анализ, алгебра, дифференциальные уравнения, топология, теория функций комплексного переменного.

6. Язык реализации

Русский

7. Объем дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 6 з.е., 216 часов, из которых:
-лекции: 48 ч.
-практические занятия: 32 ч.
Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

8. Содержание дисциплины, структурированное по темам

Тема 1 Нормированные пространства.

1. Опредедения, свойства, примеры нормированных пространств.
2. Линейные ограниченные операторы, примеры.
3. Конечномерные пространства. Изоморфизмы, изометрии.
4. Линейные функционалы. ТеоремыХана-Банаха: аналитическая и геометрическая формы
5. Принцип равномерной ограниченности.
6. Принцип открытости.
7. Вполне непрерывные операторы. Компактность в нормированных пространствах.
8. Сопряжённые операторы.
9. Естественная изометрия. Признак ограниченности множества. Рефлексивность.

Тема2. Гильбертовы пространства.

1. Теорема о проекции. Теорема о наилучшем приближении.
2. Общий вид функционала.
3. Ортонормированные системы и базисы. Ряды Фурье.
4. Сопряжённые операторы в гильбертовых пространствах.
5. Вполне непрерывные и конечномерные операторы.

Тема3. Теорема Стоуна-Вейерштрасса.

1. Доказательство теоремы Стоуна-Вейерштрасса для вещественного и комплексного случая. Примеры всюду плотных алгебр в пространствах C(K).

9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, проверки выполнения домашних заданий, проверки индивидуальных заданий и проведения коллоквиума. Фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр.

10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Экзамен в пятом семестре проводится в письменной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из трех частей. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

Экзаменационный билет содержит три вопроса: два теоретических и один практический. Ответ на первые да вопроса предполагает формулировки и доказательства и проверяет ИОПК1.1 и ИОПК 1.3. Третий вопрос, проверяющий ИОПК 1.2, предполагает решение задачи и краткую интерпретацию полученных результатов.

Ответ на все три вопроса оценивается оценкой «отлично», ответ на два вопроса – оценкой «хорошо», Решение задачи и формулировки теорем без доказательства или ответ на один теоретический вопрос с доказательством, а второй без доказательства – «удовлетворительно». В остальных случаях оценка выставляется в зависимости от ответов на дополнительные вопросы.

Перечень теоретических вопросов

1. Нормированные пространства. Свойства.
2. Неравенства Гёльдера и Минковского.
3. Примеры банаховых и небанаховых нормированных
4. пространств.
5. Сепарабельность. Примера сепарабельных и несепарабельных нормированных пространств.
6. Линейные операторы. Теорема о равносильности непрерывности и ограниченности. Следствия.
7. Примеры линейных ограниченных и неограниченных операторов.
8. Пространство $L(E, F)$. Теорема о полноте.
9. Плотные и нигде не плотные множества. Примеры. Теорема Бэра. Пример нормированного пространства, равного объединению счётного числа нигде не плотных множеств.
10. Поточечная и равномерная ограниченность операторов. Примеры. Принцип равномерной ограниченности.
11. Теоремы о поточечной сходимости последовательности операторов. Связь с равномерной сходимостью. Примеры.
12. Линейные ограниченные функционалы. Примеры линейных ограниченных и неограниченных функционалов.
13. Теорема Хана-Банаха (аналитическая форм), для комплексного случая, для нормированных пространств. Следствия 1-8.
14. Конечномерные нормированные пространства. Изоморфизм всех нормированных пространств одной размерности. Следствия.
15. Компактность единичного шара в конечномерных пространствах и некомпактность в бесконечномерных пространствах. Теорема о почти перпендикуляре. Примеры в lp, C0, C[a.b], $L_p(a, b)$.
16. Выпуклые функционалы. Свойства функционала Минковского.
17. Теорема о разделении выпуклых множеств.
18. Теорема о строгом разделении выпуклых множеств.
19. Связь между линейными функционалами и гиперплоскостями. Примеры гиперплоскостей и подпространств, не являющихся гиперплоскостями.
20. Выпуклые и идеально выпуклые множества. Свойства, примеры. Теорема о замкнутых выпуклых множествах в банаховом пространстве.
21. Внутренние и радиально внутренние точки. Примеры. Теорема о радиально внутренней точке x=0.
22. Доказательство включения $\mathrm{rint}\bar{A} \subset \mathrm{int}\bar{A}$ для идеально выпуклого множества A в банаховом пространстве.
23. Доказательство включения $\mathrm{int}\bar{A} \subset \mathrm{int}A$ для идеально выпуклого множества A в банаховом пространстве.
24. Принцип открытости отображения.
25. Теорема Банаха об обратном операторе. Теорема о замкнутом графике.
26. Относительная компактность. Теоремы Хаусдорфа и Арцела- Асколи.
27. Вполне непрерывные операторы. Примеры. Вполне непрерывность суммы, умножения на число, композиции и предельного оператора. Вполне непрерывность оператора Фредгольма.
28. Вполне непрерывность сопряжённого оператора.
29. Естественная изометрия. Рефлексивные пространства. Примеры. Рефлексивность замкнутого подпространства. Признак неограниченности множества в нормированном пространств

30. . Гильбертовы пространства. Примеры. Свойства. Неравенство Коши-Буняковского.
31. Теорема о наилучшем приближении. Теорема о проекции. Следствия.
32. Общий вид линейных ограниченных функционалов в гильбертовом пространстве. Функционалы в $\mathbb{C}^n$, l_2, $\mathcal{L}_2$(a,b).
33. Теорема Шмидта об ортогонализации линейно независимой системы. Примеры ортонормированных систем в пространствах $\mathbb{C}^n$, l_2, $\mathcal{L}_2$(a,b).
34. Ряды Фурье в гильбертовых пространствах. Экстремальное свойство многочлена Фурье. Неравенство Бесселя. Сходимость ряда Фурье.
35. Полные и замкнутые ортонормированные системы. Равносильность этих условий.
36. Сопряжённые операторы. Теорема о существовании оператора T*. Примеры, Свойства, вполне непрерывность оператора T* в гильбертовом пространстве.
37. Самосопряжённые операторы. Примеры. Теорема о норме самосопряжённого оператора.
38. Конечномерные и вполне непрерывные операторы в гильбертовом пространстве. Теорема о приближении вполне непрерывного оператора конечномерными.
39. Теорема об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств.

Примеры задач:

1.Исследовать последовательность функций$x_n(t) = \frac{nt}{n^2t^2+1}$ на

сходимость в пространствах C[-1,1], $\mathcal{L}_1(-1,1), \mathcal{L}_2(-1,1)$.

2. Исследовать последовательность функций $x_n(t)$=e^{-nt} на

3. Исследовать последовательность функций $x_n(t)$=$e^{-\frac{t}{t+n+1}}$ на
сходимость в пространствах C[-1,1], $\mathcal{L}_1(-1,1), \mathcal{L}_2(-1,1)$.

4. Является ли ограниченным функционал f(x)=x(0)$-\int_{-1}^{1} x(t)dt$ на
пространстве C[-1,1]. Найти его норму.

5. Является ли ограниченным функционал f(x)=$\int_{-1}^{1} tgt\ x(t)dt$ на
пространстве $\mathcal{L}_1\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Найти его норму (в случае ограниченности)

6. Является ли ограниченным функционал f(x)=$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{\sqrt{n}}$ в пространствах ℓ_1, ℓ_2. Найти норму (в случае ограниченности).

7. Является ли ограниченным функционал f(x)=$\sum_{n=1}^{\infty} x_n cos\frac{1}{n}$ в пространствах ℓ_1, ℓ_2. Найти норму (в случае ограниченности)

8. Пусть $L \subset \mathbb{R}^2$ – линейное подпространство L={(x,y): y-2x=0}.
Продолжить функционал f(x)=x+y с подпространства L на$\mathbb{R}^2$ с сохранением нормы.

9. Найти норму оператора T: $\mathcal{L}_2(-1,1) \rightarrow \mathcal{L}_1(-1,1)$, Tx(t)=tx(t).

10. Найти норму оператора T: $\mathcal{L}_2(-1,1) \rightarrow \mathcal{L}_1(-1,1)$, Tx(t)=$\frac{x(t)}{\sqrt[4]{t}}$

11. Найти сопряжённый к оператору $T: \mathcal{L}_2(0,2) \to \mathcal{L}_2(0,2)$
Tx(t)= $\int_1^2 tx(t)dt$

12. Найти сопряжённый к оператору $T: \mathcal{L}_2(0,2) \to \mathcal{L}_2(0,2)$ Tx(t)= $\int_0^t sx(s)ds$

13.В пространстве $\mathcal{L}_2(0,2)$ найти элемент y(t), ортогональный подпространству L=sp{1, |t-1|,[t]}

14. В пространстве $\mathcal{L}_2(-1,1)$ найти элемент y(t), ортогональный подпространству L=sp{1, t, t^2}

15. Исследовать относительную компактность множества
A={ y(t)=$\int_0^t x(s)ds$: $||x|| \leq K$ }в пространстве C[0,1].

16. Исследовать относительную компактность множества
A$\subset$ C[0,1], где A– множество непрерывно дифференцируемых функций, таких, что $|x'(t)| \leq K$ для всех $t \in [0,1\,]$ и уравнение x(t)=0 имеет хотя бы один корень на промежутке [0,1].

17 Является ли относительно компактным равномерно ограниченное множество многочленов второй степени в пространстве C[0,1].

18. Является ли относительно компактным множество $\{x \in \ell_2 : |\,x_n| \leq \frac{1}{2}\}$ в пространстве ℓ_2.

19. . Является ли относительно компактным множество $\{x \in \ell_2 : |\,x_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\}$ в пространстве ℓ_2.

20. Является ли вполне непрерывным оператор C[0,1]→ $C[0,1]$
$Tx(t)$=x(0)+$t^2x(1)$

21.Является ли вполне непрерывным оператор C[0,1]→ $C[0,1]$
$Tx(t)$=$(t^2 - t)x(t)$

22. Является ли вполне непрерывным оператор
$Tx(t) = \frac{x(t)-x(-t)}{2}$ в пространстве C[-1,1].

23. Является ли вполне непрерывным оператор $Tx(t) = x(t^2)$ в пространстве C[-1,1]

11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «Moodle» - https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=8872

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

в) План практических занятий по дисциплине.

г) Методические указания по выполнению индивидуальных заданий.

12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

–

1. Колмогоров А.В., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, М.: физматлит , 2009, 572 с.
2. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Функциональный анализ. Санкт-Петербург, «Лань», 2009, 272 с.
3. Филимоненкова Н.В. Конспект лекций по функциональному анализа. Санкт-Петербург, «Лань», 2015, 176 с.
4. Сергеев А.Г. Лекции по функциональному анализу. М.: МИАН. 2013. 100 с
5. Порошкин А.Г. Лекции по функциональному анализу. Москва: Вузовская книга, 2007. 431 с.
6 Сибиряков Г.В. Введение в теорию пространств Банаха. - Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982. - 82 с.

б) дополнительная литература

1. Власова Е.А., Марчевский К.А. Элементы функционального анализа. Санкт-Петербург, «Лань», 2015, 400 с.
2. Треногин В.А. Функциональный анализ и его применение. – М.: Наука, 1980.
3. В. Хатсон, Дж. Пим. Приложения функционального анализа и теории операторов. – М.: Мир, 1983.
4. М. Рид, Б. Саймон. Методы современной математической физики. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1977.
5. Рудин У. Функциональный анализ. - М.: Мир, 1975. - 448 с.
6. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. - М.: ИЛ, 1962. - 896 с.

13. Перечень информационных технологий

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

–

б) информационные справочные системы:

– Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ – http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system

– Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ – http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index

– ЭБС Лань – http://e.lanbook.com/

14. Материально-техническое обеспечение

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

15. Информация о разработчиках

Хмылёва Татьяна Евгеньевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры теории функций, ТГУ, доцент.