


Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ:

Декан



Л. В. Гензе

« 31 » 06 20 22 г.

Рабочая программа дисциплины

Дополнительные главы функционального анализа

по направлению подготовки

01.03.01 Математика

Направленность (профиль) подготовки :

Основы научно-исследовательской деятельности в области математики

Форма обучения

Очная

Квалификация

Бакалавр

Год приема

2022

Код дисциплины в учебном плане: Б1.В.3.02

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОП



Л. В. Гензе

Председатель УМК



Е. А. Тарасов

Томск – 2022

1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики как для использования в профессиональной деятельности, так и для консультирования.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Демонстрирует навыки работы с профессиональной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам

ИОПК 1.2 Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин

ИОПК 1.3 Владеет фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук

2. Задачи освоения дисциплины

Освоить основные понятия функционального анализа, изучить основные теоремы общей теории меры, получить необходимые знания теории операторов в банаховых и гильбертовых пространствах для дальнейшего самостоятельного изучения математической литературы.

– Научиться использовать теоретические знания для решения интегральных и дифференциальных уравнений, для исследования сходимости последовательностей по мере, почти всюду, почти равномерной, и других практических задач профессиональной деятельности.

3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к Блоку 1 «Дисциплина (модули)».

Дисциплина относится к обязательной части образовательной программы.

4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине

Шестой семестр, зачет с оценкой

5. Входные требования для освоения дисциплины

Для успешного освоения дисциплины требуются результаты обучения по следующим дисциплинам: математический анализ, топология.

6. Язык реализации

Русский

7. Объем дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 з.е., 108 часов, из которых:

-лекции: 32 ч.

-практические занятия: 32 ч.

в том числе практическая подготовка: 0 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

8. Содержание дисциплины, структурированное по темам

Тема 1. Спектральная теория ограниченных линейных операторов.

Определение, свойства и классификация спектра. Спектральный радиус. Спектр самосопряжённого и вполне непрерывного оператора. Теорема Гильберта-Шмидта. Уравнения Рисса-Шаудера и Вольтерра.

Тема 2. Общий вид функционала на пространстве $C[a,b]$.

Функции ограниченной вариации, теорема Жордана. Интеграл Стильбеса. Линейные ограниченные функционалы на пространстве непрерывных функций.

Тема 3. Общая теория меры.

Свойства меры на кольце. Теорема о продолжении меры на σ -алгебру Лебега. Теоремы Егорова и Лузина. Обобщённые меры. Теоремы Хана и Жордана. Абсолютно непрерывные меры и функции. Теорема Лебега и Радона-Никодима

9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, проверки выполнения домашних заданий, проверки индивидуальных заданий и проведения коллоквиума. Фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр.

10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Результаты зачета с оценкой определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Экзаменационный билет содержит три вопроса: два теоретических и один практический. Ответ на первые два вопроса предполагает формулировки и доказательства и проверяет ИОПК 1.1 и ИОПК 1.3. Третий вопрос, проверяющий ИОПК 1.2, предполагает решение задачи и краткую интерпретацию полученных результатов.

Ответ на все три вопроса оценивается оценкой «отлично», ответ на два вопроса – оценкой «хорошо», Решение задачи и формулировки теорем без доказательства или ответ на один теоретический вопрос с доказательством, а второй без доказательства – «удовлетворительно». В остальных случаях оценка выставляется в зависимости от ответов на дополнительные вопросы.

Примерный перечень теоретических вопросов

1. Функции ограниченной вариации. Свойства, примеры. Связь с непрерывностью.
2. Теорема Жордана. Множество точек разрыва функций ограниченной вариации.
3. Интеграл Стильбеса. Свойства, примеры.
4. Существование интеграла Стильбеса для непрерывных функций.
5. Общий вид функционала на пространстве $C[a, b]$.
6. Свойства меры на кольце.
7. Меры на прямой. Счетная аддитивность. Примеры.
8. Обобщенные меры. Теорема Хана и теорема Жордана
9. Теорема Егорова
10. Теорема Лузина

11. Связь между почти равномерной сходимостью и сходимостью по мере.
12. Связь между почти равномерной сходимостью и сходимостью почти всюду.
13. Абсолютно непрерывные функции. Связь между непрерывностью, абсолютной непрерывностью и ограниченной вариацией
14. Абсолютно непрерывные функции. Связь между непрерывностью, абсолютной непрерывностью и ограниченной вариацией.
15. Лемма об абсолютно непрерывных мерах.
16. Связь между сходимостью по мере и почти всюду.
17. Свойства спектра линейного ограниченного оператора.
18. Спектр самосопряжённого оператора.
19. Спектр вполне непрерывного оператора.
20. Уравнения Рисса-Шаудера. Теоремы Фредгольма.
21. Теорема о неподвижной точке. Решение уравнений Вольтерра.
22. Спектральный радиус.
23. Теорема о полиномиальном отображении спектра.

Примеры задач:

1. Пусть функция $x:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что $|x'(t)| \leq K$ для всех $t \in [a,b]$. Будет ли x :
 - 1) функцией ограниченной вариации,
 - 2) абсолютно непрерывной?
2. Пусть алгебра $\mathcal{A} = 2X$ и $\mu A = \delta x' - \delta x''$, где $x', x'' \in X$ и $x' \neq x''$. Является ли мера μ :
 - 1) регулярной
 - 2) абсолютно непрерывной относительно меры $\nu = \delta x' + \delta x''$?
3. Исследовать на сходимость последовательность функций $x_n(t) = \frac{2nt}{t^2 + n^2}$
 - 1) на промежутке $(0, +\infty)$;
 - 2) на отрезке $[0, 1]$.
4. Пусть $x(t) = \text{sign } t$. Существуют ли интегралы $\int_{-1}^1 x(t) dx(t)$ и $\int_0^1 x(t) dx(t)$.
5. Исследовать на сходимость последовательность функций $x_n(t) = e^{-|t-n|}$ на:
 - 1) отрезке $[-1, 1]$;
 - 2) на прямой $(-\infty; +\infty)$.
6. Исследовать на сходимость последовательность функций $x_n(t) = e^{\frac{1-nt}{2}}$ на:
 - 1) на прямой $(-\infty; +\infty)$;
 - 2) отрезке $[-1, 1]$.
7. Исследовать на сходимость последовательность функций $x_n(t) = \text{arctg } tn$ на:
 - 1) отрезке $[-1, 1]$;
 - 2) на прямой $(-\infty; +\infty)$.
8. Пусть $f: C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ - линейный ограниченный функционал, заданный формулой $f(x) = -x(0)$. Записать функционал f в виде интеграла Стильтьеса.

9. Пусть $f: C[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ - линейный ограниченный функционал, заданный формулой $f(x) = x(1) - x(1/2)$. Записать функционал f в виде интеграла Стильтьеса.
10. Найти спектр оператора Фредгольма $Tx(t) = \int_0^1 (t^2 + s) ds$
11. Найти спектр оператора $T: \ell_2 \rightarrow \ell_2$, $T(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (2x_3, x_1, x_2, 0, 0, \dots)$

1. Учебно-методическое обеспечение

- а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «Moodle» - <https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=6752>
- б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.
- в) План/ практических занятий по дисциплине.
- г) Методические указания по выполнению индивидуальных заданий.

Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

1. Колмогоров А.В., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, М.: физматлит, 2009, 572 с.
2. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Функциональный анализ. Санкт-Петербург, «Лань», 2009, 272 с.
3. Филимоненкова Н.В. Конспект лекций по функциональному анализу. Санкт-Петербург, «Лань», 2015, 176 с.
4. Сергеев А.Г. Лекции по функциональному анализу. М.: МИАН. 2013. 100 с
5. Порошкин А.Г. Лекции по функциональному анализу. Москва: Вузовская книга, 2007. 431 с.
- 6 Сибиряков Г.В. Введение в теорию пространств Банаха. - Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982. - 82 с.

б) дополнительная литература

1. Власова Е.А., Марчевский К.А. Элементы функционального анализа. Санкт-Петербург, «Лань», 2015, 400 с.
2. Треногин В.А. Функциональный анализ и его применение. – М.: Наука, 1980.
3. В. Хатсон, Дж. Пим. Приложения функционального анализа и теории операторов. – М.: Мир, 1983.
4. М. Рид, Б. Саймон. Методы современной математической физики. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1977.
5. Рудин У. Функциональный анализ. - М.: Мир, 1975. - 448 с.
6. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. - М.: ИЛ, 1962. - 896 с.

в) ресурсы сети Интернет:

- открытые онлайн-курсы
- Журнал «Эксперт» - <http://www.expert.ru>
- Общероссийская Сеть КонсультантПлюс Справочная правовая система. <http://www.consultant.ru>

13. Перечень информационных технологий

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение: нет

б) информационные справочные системы:

– Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ –
<http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system>

– Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ –
<http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index>

– ЭБС Лань – <http://e.lanbook.com/>

– ЭБС Консультант студента – <http://www.studentlibrary.ru/>

14. Материально-техническое обеспечение

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

Аудитории для проведения занятий лекционного и семинарского типа индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации в смешенном формате («Актру»).

15. Информация о разработчиках

Хмылёва Татьяна Евгеньевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры теории функций, ТГУ, доцент.